Tentamen Analyse 4

Donderdag 21 juni 2012, 10 – 13 uur

- Vermeld uw naam (met voornaam en voorletters) en uw studentnummer.
- Er zijn geen hulpmiddelen toegestaan.
- Dit tentamen bestaat uit *zes* opgaven. Vergeet de achterkant niet.
- Punten per opgave (onder voorbehoud): 3 5 6 6 4 3.
- Tentamencijfer = (aantal punten + 3)/3.

---

1. Laat $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch zijn op de niet-lege open samenhangende deelverzameling D van $\mathbb{C}$ en veronderstel dat het reële deel van f constant is op D. Toon aan dat f constant is op D.

2. Beschouw het polynoom $p(z) = z^5 + 6z - 1$.

(a) Laat zien dat p precies één nulpunt heeft in de schijf $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{4}\}$ en toon aan dat dit nulpunt reëel is.

(b) Laat zien dat p precies vier verschillende nulpunten heeft in de annulus $\{z \in \mathbb{C} : \frac{3}{2} < |z| < 2\}$.

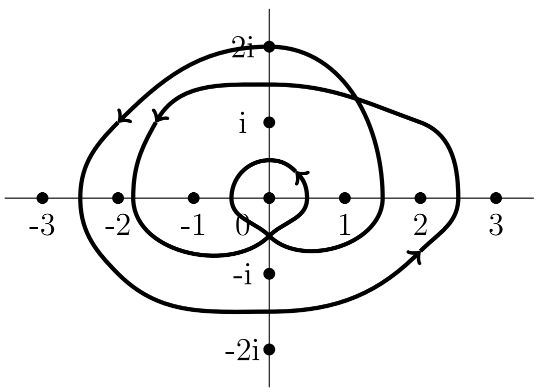
3. Beschouw de functie f die, op zijn natuurlijke definitiegebied in het complexe vlak, gegeven wordt door

$$f(z) = \frac{z+2}{z^2 \sin(\pi z/2)}.$$

(a) Bepaal voor iedere geïsoleerde singulariteit van f in het complexe vlak het type van de betreffende singulariteit. Vermeld bij een eventuele pool ook de orde. Licht uw antwoorden kort toe.

(b) Bepaal voor iedere geïsoleerde singulariteit van f in het complexe vlak het residu van f in de betreffende singulariteit.

(c) Bereken $\int_\alpha f(z)\,dz$, waarbij het beeld van α de contour in de onderstaande figuur is.



Zie ommezijde

4. Bereken de oneigenlijke integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\, dx.$$

5. Laat $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \to \mathbb{C}$ gegeven zijn door

$$f(z) = z/(z^2+1)$$

en laat verder

$$\begin{aligned} A_{\text{binnen}} &= \{z \in \mathbb{C} :\ 0 < |z-i| < 2\}, \\ A_{\text{buiten}} &= \{z \in \mathbb{C} :\ |z-i| > 2\}. \end{aligned}$$

(a) Bepaal de Laurentreeks van f rond i op de annulus A_{binnen}.

(b) Bepaal de Laurentreeks van f rond i op de annulus A_{buiten}.

(c) Wat is de convergentiestraal van de machtreeks van f rond $1+i$? Motiveer kort uw antwoord.

6. Laat $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch zijn en veronderstel dat

$$|f'(z)| < \frac{|f(z)|}{|z|^2}$$

voor alle z in $\mathbb{C}$ met $|z| > 1$.

(a) Laat zien dat f geen nulpunten heeft op $\mathbb{C}$. (Hint: overdenk f'/f.)

(b) Laat zien dat f'/f constant is op $\mathbb{C}$. U kunt gebruikmaken van het resultaat van (a), ook als u dit niet heeft opgelost.

(c) Leid hieruit af dat f constant is op $\mathbb{C}$. U kunt gebruikmaken van het resultaat van (a) en/of (b), ook als u deze niet heeft opgelost.