Tentamen Analyse 4

Maandag 27 augustus 2012, 14 – 17 uur

- Vermeld uw naam (met voornaam en voorletters) en uw studentnummer.
- Er zijn geen hulpmiddelen toegestaan.
- Dit tentamen bestaat uit *vijf* opgaven. Vergeet de achterkant niet.
- Punten per opgave (onder voorbehoud):
- $(2+2)+(3\frac{1}{2}+2\frac{1}{2})+(1+2+2)+6+(1+2+2+1)$
- Tentamencijfer = (aantal punten + 3)/3.

---

1. (a) Geef een analytische functie $f = u + iv : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ waarvan het reële deel wordt gegeven door $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 1$.

(b) Beschrijf in expliciete formulevorm *alle* analytische functies $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ als in het eerste onderdeel. Motiveer waarom de beschrijving volledig is.

2. Laat $c \in \mathbb{C}$ een constante zijn en beschouw $f_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeven door

$$f_c(z) = e^z - cz^2.$$

Laat $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ de open eenheidsschijf zijn.

(a) Als $|c| > e$, dan heeft f_c precies twee verschillende nulpunten op $\mathbb{D}$. Toon dit aan.

(b) Als $|c| < 1/e$, dan heeft f_c geen enkel nulpunt op $\mathbb{D}$. Toon dit aan.

3. (a) Bepaal alle nulpunten van de functie $\cos z$ in het complexe vlak.

Zij N de onder (a) bedoelde verzameling. We beschouwen de functie $f : \mathbb{C} \setminus N \to \mathbb{C}$ gegeven door $f(z) = 1/\cos z$.

(b) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks van f rond 0.

(c) Het feit dat f een even functie is impliceert dat de machtreeks van f rond 0 de gedaante $\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} z^{2k}$ heeft. Geef een nauwkeurige argumentatie waarom dit zo is.

Zie ommezijde

4. Bereken de waarde van de integraal

$$\int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2+1}\,dx.$$

5. Voor $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, beschouwen we de functie

$$f_k(z) = \frac{1}{(z-3)(z^k-1)}$$

op haar natuurlijke definitiegebied in het complexe vlak. Laat, voor $R > 0$, α_R de cirkel met middelpunt 0 en straal R zijn, zoals gebruikelijk tegen de wijzers van de klok in doorlopen.

(a) Bereken het residu van f_k in 3.

(b) Als $R > 3$, dan is

$$\int_{\alpha_2} f_k(z)\,dz = \int_{\alpha_R} f_k(z)\,dz - \frac{2\pi i}{3^k-1}.$$

Toon dit aan.

(c) Laat zien dat

$$\int_{\alpha_2} f_k(z)\,dz = -\frac{2\pi i}{3^k-1}.$$

(d) Zij $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(k) z^n$ de Laurentreeks van f_k op de annulus $\{z \in \mathbb{C} :\ 1 < |z| < 3\}$. Toon aan dat

$$c_{-1}(k) = -\frac{1}{3^k-1}.$$