Tentamen Analyse 4

Donderdag 20 juni 2013, 10 – 13 uur

- Vermeld uw naam (met voornaam en voorletters), studie en nummer.
- Er zijn geen hulpmiddelen toegestaan.
- Dit tentamen bestaat uit *vijf* opgaven. Vergeet de achterkant niet.
- Punten per opgave (onder voorbehoud):
- $(3\frac{1}{2}+1\frac{1}{2})+(2+2+2)+(2+2+2)+(6)+(2+2)$
- Tentamencijfer = (aantal punten + 3)/3.

---

1. De functie $p:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ is gegeven door $p(z)=z^7-5z^3+12$.

(a) Laat zien dat alle zeven nulpunten van p (naar multipliciteit geteld) in de open annulus $\{z\in\mathbb{C}:1<|z|<2\}$ liggen.

(b) Laat (met wat handigheid) zien dat p zeven *verschillende* nulpunten in de open annulus uit onderdeel (a) heeft.

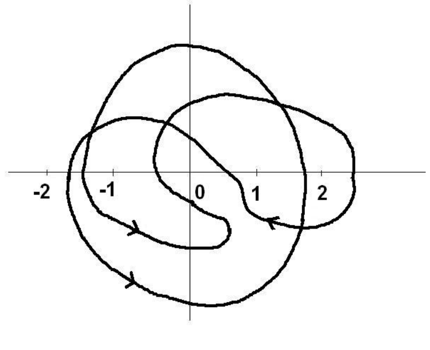
2. Beschouw de functie f die, op zijn natuurlijke definitiegebied in het complexe vlak, gegeven wordt door

$$f(z)=\frac{\sin\left(\dfrac{\pi z}{2}\right)}{z(z+1)(z-1)^2}.$$

(a) Bepaal voor iedere geïsoleerde singulariteit van f het type van de betreffende singulariteit. Vermeld bij een eventuele pool ook de orde van de pool en motiveer dit getal.

(b) Bepaal voor iedere niet-ophefbare singulariteit van f het residu van f in de betreffende singulariteit.

(c) Bereken $\int_\alpha f(z)\,dz$, waarbij het beeld van α de georiënteerde contour in de onderstaande figuur is.



Zie ommezijde

3. Beschouw de functie $f : \mathbb{C} \setminus \{-2, 2\} \to \mathbb{C}$, gegeven door

$$f(z) = \frac{5z - 2}{z^2 - 4} + e^z.$$

(a) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks van f rond het punt $3 - 2i$.

(b) Bepaal de Laurentreeks van f op de annulus $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-3| < 5\}$.

(c) Bepaal de Laurentreeks van f op de annulus $\{z \in \mathbb{C} : |z-3| > 5\}$.

4. Bereken de waarde van de oneigenlijke integraal

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^4 + 1}\, dx,$$

waarbij $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ de gebruikelijke logaritme is.

5 (a) Als $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch is en er is een $M \geq 0$, zodanig dat $|f(z)| \leq M$ voor alle $z \in \mathbb{C}$, dan is f constant. Bewijs deze stelling van Liouville.

(b) Als $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch is en $\operatorname{Im} f(z) \geq 0$ voor alle $z \in \mathbb{C}$, dan is f constant. Bewijs dit.