Tentamen Analyse 4

Woensdag 10 juli 2013, 10 – 13 uur

- Vermeld uw naam (met voornaam en voorletters) en uw studentnummer.
- Er zijn geen hulpmiddelen toegestaan.
- Dit tentamen bestaat uit *vijf* opgaven. Vergeet de achterkant niet.
- Punten per opgave (onder voorbehoud):
- $(3\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}) + (2 + 2 + 2) + (1 + 3\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}) + (6) + (2 + 2)$.
- Tentamencijfer = (aantal punten + 3)/3.

---

1. De functie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ is gegeven door $f(z) = z^{11} + 4e^{z+1} - 2$.

(a) Laat zien dat f 11 nulpunten (naar multipliciteit geteld) in de open annulus $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$ heeft.

(b) Laat zien dat f 11 *verschillende* nulpunten in de open annulus uit onderdeel (a) heeft. (Hint: deze vraag kan leiden tot een polynomiale vergelijking. Wat kunt u zeggen over de ligging van de oplossingen?)

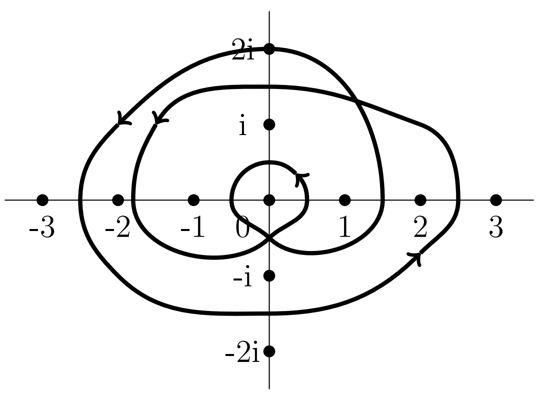
2. Beschouw de functie f die, op zijn natuurlijke definitiegebied in het complexe vlak, gegeven wordt door

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3(z^2+1)}.$$

(a) Bepaal voor iedere geïsoleerde singulariteit van f het type van de betreffende singulariteit. Vermeld bij een eventuele pool ook de orde van de pool en motiveer dit getal.

(b) Bepaal voor iedere niet-ophefbare geïsoleerde singulariteit van f het residu van f in de betreffende singulariteit.

(c) Bereken $\int_\alpha f(z)\,dz$, waarbij het beeld van α de georiënteerde contour in de onderstaande figuur is. Geef het antwoord in de vorm $a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$.



Zie ommezijde

3. Beschouw de functie $f : \mathbb{C} \setminus \{-i, i, 2i\} \to \mathbb{C}$, gegeven door

$$f(z) = \frac{3z + i}{z^2 + 1} + \frac{z}{z - 2i}.$$

(a) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks van f rond het punt $3 + 5i$.

(b) Bepaal de Laurentreeks van f op de annulus $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-2i| < 3\}$.

(c) Bepaal de Laurentreeks van f op de annulus $\{z \in \mathbb{C} : |z-2i| > 3\}$.

4. Toon aan[1] dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{x^4 + 16}\, dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}}(\cos\sqrt{2} - \sin\sqrt{2}).$$

5. (a) Laat met een nauwkeurige argumentatie zien dat er geen analytische functie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bestaat, zodanig dat $f(1/n) = n^2/(1+n^2)$ voor alle $n = 1, 2, 3, \ldots$. (Hint: overdenk $1/(1 + z^2)$.)

(b) Bewijs de volgende stelling:
Laat $r > 0$, $a \in \mathbb{C}$ en veronderstel dat $g : \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < r\} \to \mathbb{C}$ analytisch is op de gepuncteerde schijf rond a met straal r, zodanig dat $\lim_{z\to a}(z - a)g(z) = 0$. Dan is g uit te breiden tot een analytische functie op de gehele open schijf $\{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$.
Indien nodig mag Riemann's stelling over ophefbare geïsoleerde singulariteiten in het bewijs gebruikt worden.

---

[1] Besteed, indien nodig, niet te veel tijd aan de eindberekening.