Tentamen Analyse 4

Donderdag 5 juni 2014, 10 – 13 uur

- Vermeld uw naam (met voornaam en voorletters) en uw studentnummer.
- Er zijn geen hulpmiddelen toegestaan.
- Dit tentamen bestaat uit *vijf* opgaven. Vergeet de achterkant niet.
- Punten per opgave (onder voorbehoud):
- $(3\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}) + (2 + 2 + 2) + (1 + 3\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}) + (6) + (2 + 2)$.
- Tentamencijfer = (aantal punten + 3)/3.

---

1. De functie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ is gegeven door $f(z) = z^9 + 3z + 1$.

(a) Laat zien dat f 8 nulpunten (naar multipliciteit geteld) in de open annulus $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ heeft.

(b) Laat zien dat f 8 *verschillende* nulpunten in de open annulus uit onderdeel (a) heeft. U kunt hierbij gebruikmaken van het resultaat van onderdeel (a), ook als u dit niet heeft opgelost.

2. Laat $D = \mathbb{C} \setminus (\{x : x \leq 0\} \cup \{1\} \cup \{ik : k \in \mathbb{Z}\})$, d.w.z. verwijder uit $\mathbb{C}$ de negatieve reële as, het punt 1 en de punten ik met k geheel. Dan is D het natuurlijke domein voor de functie $f : D \to \mathbb{C}$, gedefinieerd door

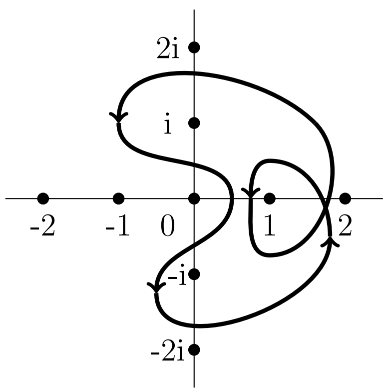
$$f(z) = \frac{\operatorname{Log} z}{(z-1)^2 \sin(i\pi z)} + \frac{\sin(\pi z)}{(z-1)^3} \qquad (z \in D),$$

waarbij Log de hoofdwaarde van de logaritme is.

(a) Bepaal voor iedere geïsoleerde singulariteit van f het type van de betreffende singulariteit. Vermeld bij een eventuele pool ook de orde van de pool en motiveer dit getal.

(b) Bepaal voor iedere geïsoleerde singulariteit van f het residu van f in de betreffende singulariteit. Geef hierbij zo expliciet mogelijke uitdrukkingen voor voorkomende waarden van trigonometrische functies en complexe logaritmen.

(c) Bereken $\int_\alpha f(z)\, dz$, waarbij het beeld van α de georiënteerde contour in de onderstaande figuur is. Geef, als u niet alle ingrediënten voor de berekening tot uw beschikking heeft, in ieder geval aan *hoe* deze integraal kan worden uitgerekend.



Zie ommezijde

3. Beschouw de functie $f : \mathbb{C} \setminus \{-2i, 2i, 3\} \to \mathbb{C}$, gegeven door

$$f(z) = \frac{2}{z^2+4} - \frac{z}{z-3}.$$

(a) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks van f rond het punt $4+2i$.

(b) Bepaal de Laurentreeks van f op de annulus $\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < 3\}$. U behoeft uw antwoord niet te vereenvoudigen.

(c) Bepaal de Laurentreeks van f op de annulus $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 3\}$. U behoeft uw antwoord niet te vereenvoudigen.

4. Bereken

$$\int_0^\infty \frac{x^3 \sin 2x}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx.$$

5. (a) Laat $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch zijn en veronderstel dat er $M \geq 0$ en een geheel getal $n \geq 0$ bestaan, zodanig dat

$$|f(z)| \leq M\,(|z|^n + 1)$$

voor alle z in $\mathbb{C}$. Toon aan dat f een polynoom van graad ten hoogste n is.

(b) Laten $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ twee analytische functies zijn en veronderstel dat er $M \geq 0$ en een getal $n \geq 0$ bestaan, zodanig dat

$$|f(z)| \leq M\,(|z|^n + 1)\,|g(z)|$$

voor alle z in $\mathbb{C}$. Toon dat er een polynoom p van graad ten hoogste n is, zodanig dat $f(z) = p(z)g(z)$ voor alle $z \in \mathbb{C}$. U kunt hierbij gebruikmaken van het resultaat van onderdeel (a), ook als u dit niet heeft opgelost.