Tentamen Analyse 4

Woensdag 9 juli 2014, 10 – 13 uur

- Vermeld uw naam (met voornaam en voorletters) en uw studentnummer.
- Er zijn geen hulpmiddelen toegestaan.
- Dit tentamen bestaat uit *vijf* opgaven. **Vergeet de achterkant niet!!**
- Punten per opgave (onder voorbehoud):
- $(1+2+2)+(2+2\frac{1}{2}+2)+(1+3\frac{1}{2}+1)+(6)+(2+2)$.
- Tentamencijfer = (aantal punten + 3)/3.

---

1. Laat $n \geq 1$ geheel zijn en veronderstel dat $\lambda \in \mathbb{C}$ met $0 < |\lambda| < 3$. De functie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ is gegeven door $f(z) = (z-3)^n + \lambda^n e^{-z}$.

(a) Als z een nulpunt van f is dat in het open rechterhalfvlak $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ ligt, dan moet er gelden dat $|z-3| < 3$. Toon dit aan.

(b) Laat zien dat f n nulpunten (naar multipliciteit geteld) in het open rechterhalfvlak $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ heeft. U kunt hierbij gebruikmaken van het resultaat van onderdeel (a), ook als u dit niet heeft opgelost.

(c) Laat zien dat f n *verschillende* nulpunten in het open rechterhalfvlak $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ heeft. U kunt hierbij gebruikmaken van het resultaat van onderdeel (b), ook als u dit niet heeft opgelost.

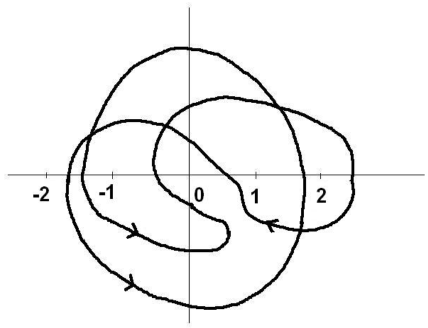
2. Beschouw de functie f die, op zijn natuurlijke domein $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ in het complexe vlak, gegeven wordt door

$$f(z) = \frac{z(z-1)}{\sin \pi z} + \frac{z}{(z+1)^2} \qquad (z \notin \mathbb{Z}).$$

(a) Bepaal voor iedere geïsoleerde singulariteit van f het type van de betreffende singulariteit. Vermeld bij een eventuele pool ook de orde van de pool en motiveer dit getal.

(b) Bepaal voor iedere geïsoleerde singulariteit van f het residu van f in de betreffende singulariteit. Geef hierbij zo expliciet mogelijke uitdrukkingen voor voorkomende waarden van trigonometrische functies.

(c) Bereken $\int_\alpha f(z)\,dz$, waarbij het beeld van α de georiënteerde contour in de onderstaande figuur is. Geef, als u niet alle ingrediënten voor de berekening tot uw beschikking heeft, in ieder geval aan *hoe* deze integraal kan worden uitgerekend.



3. Beschouw de functie $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 2\} \to \mathbb{C}$, gegeven door

$$f(z) = e^{2z} + \frac{z-6}{z(z-3)} \qquad (z \neq 0, 3).$$

(a) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks van f rond het punt $-3 + 4i$.

(b) Bepaal de Laurentreeks van f op de annulus $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-1| < 2\}$. U behoeft uw antwoord niet te vereenvoudigen.

(c) Bepaal de Laurentreeks van f op de annulus $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 2\}$. U behoeft uw antwoord niet te vereenvoudigen.

4. Laten m en n geheel zijn zodanig dat $0 \leq n \leq m - 2$. Toon, eventueel gebruikmakend van een geschikte taartpuntkromme, aan dat

$$\int_0^\infty \frac{x^n}{1 + x^m}\, dx = \frac{\pi}{m \sin\left(\frac{\pi(n+1)}{m}\right)}.$$

5. Laat $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch zijn. Veronderstel dat voor alle gehele $n \geq 0$ geldt dat

$$|f(z)| \leq e^{-n}$$

voor alle z op de ellips $\{z \in \mathbb{C} : (\operatorname{Re} z)^2 + 2\,(\operatorname{Im} z)^2 = n\}$.

(a) Toon aan dat f begrensd is.

(b) Toon dat $f(z) = 0$ voor alle $z \in \mathbb{C}$. U kunt hierbij gebruikmaken van het resultaat van onderdeel (a), ook als u dit niet heeft opgelost.