Tentamen Complexe Functietheorie

Woensdag 8 juli 2015, 10 – 13 uur

- Vermeld uw naam (met voornaam en voorletters) en uw studentnummer.
- Er zijn geen hulpmiddelen toegestaan.
- Dit tentamen bestaat uit *vijf* opgaven. Vergeet de achterkant niet.
- Punten per opgave (onder voorbehoud):
- $(3\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}) + (2 + 2 + 2) + (3 + 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}) + (6) + (2 + 2)$.
- Tentamencijfer = (aantal punten + 3)/3.

---

1. De functie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ is gegeven door $f(z) = z^5 - 15z + 1$.

(a) Laat zien dat f 4 nulpunten (met multipliciteit geteld) in de open annulus $\{z \in \mathbb{C} : \frac{3}{2} < |z| < 2\}$ heeft.

(b) Laat zien dat f 4 *verschillende* nulpunten in de open annulus uit onderdeel (a) heeft. U kunt hierbij gebruikmaken van het resultaat van onderdeel (a), ook als u dit niet heeft opgelost.

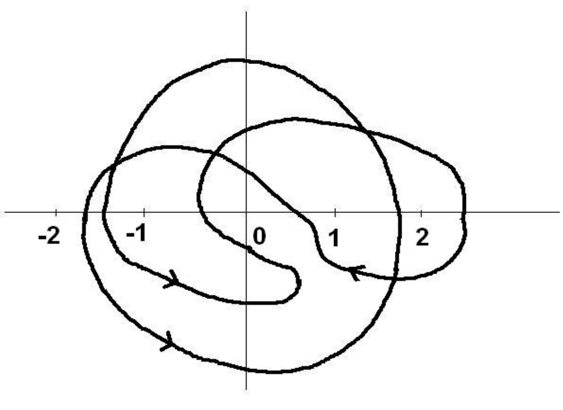
2. Beschouw de functie f die, op zijn natuurlijke domein in het complexe vlak, gegeven wordt door

$$f(z) = \frac{z(z-1)}{\sin \pi z} + \frac{\sin z}{z^4}.$$

(a) Bepaal voor iedere geïsoleerde singulariteit van f het type van de betreffende singulariteit. Vermeld bij een eventuele pool ook de orde van de pool en motiveer dit getal.

(b) Bepaal voor iedere geïsoleerde singulariteit van f het residu van f in de betreffende singulariteit. Geef hierbij zo expliciet mogelijke uitdrukkingen voor voorkomende waarden van trigonometrische functies.

(c) Bereken $\int_\alpha f(z)\,dz$, waarbij het beeld van α de georiënteerde contour in de onderstaande figuur is. Geef, als u niet alle ingrediënten voor de berekening tot uw beschikking heeft, in ieder geval aan *hoe* deze integraal kan worden uitgerekend.



Zie ommezijde

3. Beschouw de functie $f : \mathbb{C} \setminus \{2, 4\} \to \mathbb{C}$, gegeven door

$$f(z) = \frac{2}{z-2} - \frac{z}{z-4}.$$

(a) Bepaal de Laurentreeks van f op de annulus $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-1| < 3\}$. U behoeft uw antwoord niet te vereenvoudigen.

(b) Bepaal de Laurentreeks van f op de annulus $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 3\}$. U behoeft uw antwoord niet te vereenvoudigen.

(c) Bepaal de Laurentreeks van

$$g(z) = \frac{1}{(z-2)^2}$$

op de annulus $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 1\}$. U kunt hierbij gebruikmaken van uw berekeningen onder onderdeel (a) en/of (b). Motiveer in dat geval wel uw werkwijze.

4. Laat $a, b > 0$. Bereken de oneigenlijke integraal

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2 + b^2}\, dx.$$

5. (a) Laat $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch zijn en veronderstel dat $\mathrm{Re} f(z) \leq 2015$ voor alle $z \in \mathbb{C}$. Toon aan dat f constant is.

(b) Laten $f, g : \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2016\} \to \mathbb{C}$ analytisch zijn op de open schijf met centrum 0 en straal 2016. Veronderstel dat g geen nulpunten heeft op deze schijf en dat verder $|f(z)| \leq |g(z)|$ voor alle $z \in \mathbb{C}$ waarvoor $|z| = 2015$. Laat zien dat $|f(z)| \leq |g(z)|$ voor alle $z \in \mathbb{C}$ waarvoor $|z| \leq 2015$.