Tentamen Getaltheorie

18 januari 2002, 14.00-17.00 uur

1. Bewijs dat er geen natuurlijke getallen a, b, c bestaan met $a^4 + b^4 = c^4$.

2.*a)* Bewijs dat $\sum_p \frac{1}{p \log p}$ convergeert (er wordt gesommeerd over alle priemgetallen).

b) Bewijs dat $\sum_p \frac{1}{p \log \log p}$ divergeert.

3. Parametriseer alle oplossingen $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ van $x^2 - 29y^2 = -4$.

4.*a)* Formuleer de stelling van Liouville over de benadering van algebraïsche getallen door rationale getallen.

b) Bewijs dat $\alpha := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n!}$ transcendent is.

5A. (voor 6 studiepunten, oud systeem):
Bewijs dat elk even perfect getal te schrijven is in de vorm $2^{k-1}(2^k - 1)$ waarbij $2^k - 1$ een priemgetal is.

5B. (voor 7 studiepunten, oud systeem):
Formuleer en bewijs de stelling van Dirichlet over de simultane afschatting van $|q\alpha_1 - p_1|$ en $|q\alpha_2 - p_2|$. (Dus voor $n = 2$.)

5C. (voor 9 studiepunten, oud systeem):
Formuleer en bewijs de stelling van Borel over drie opeenvolgende convergenten.

NEXT PAGE IN ENGLISH

1. Prove that there are no positive integers a, b, c such that $a^4 + b^4 = c^4$.

2. *a)* Prove that $\sum_p \frac{1}{p \log p}$ converges (the summation is over all prime numbers).

b) Prove that $\sum_p \frac{1}{p \log \log p}$ diverges.

3. Parametrize all solutions $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ of $x^2 - 29y^2 = -4$.

4. *a)* Formulate Liouville's theorem about the approximation of algebraic numbers by rational numbers.

b) Prove that $\alpha := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n!}$ is transcendental.

5A. (for 6 study points according to the old system):
Prove that every even perfect number can be expressed as $2^{k-1}(2^k - 1)$ where $2^k - 1$ is a prime number.

5B. (for 7 points according to the old system):
State and prove Dirichlet's theorem about the simultaneous approximation of $|q\alpha_1 - p_1|$ and $|q\alpha_2 - p_2|$. (So for $n = 2$).

5C. (for 9 points according to the old system):
State and prove Borel's theorem about three consecutive convergents.