Getaltheorie

Woensdag 9 juni 2004, 14:00-17:00

- Het is toegestaan een niet-programmeerbare zakrekenmachine te gebruiken.
- Elk vraagstuk telt even zwaar.

1.*a)* Zij p een priemgetal met $p > 2$. De restklassen $1 \pmod p, 2 \pmod p, \ldots, \frac{p-1}{2} \pmod p$ heten positief, en $-1 \pmod p, -2 \pmod p, \ldots, -\frac{p-1}{2} \pmod p$ negatief. Bewijs het Lemma van Gauss: als a een geheel getal is dat niet deelbaar is door p, dan is $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^\nu$, waarbij ν het aantal negatieve restklassen modulo p is onder $a \pmod p$, $2a \pmod p, \ldots, \frac{p-1}{2} \cdot a \pmod p$. Je mag gebruiken dat $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{(p-1)/2} \pmod p$.

b) Bepaal de priemgetallen p zodat $x^2 \equiv 7 \pmod p$ oplosbaar is.

2.*a)* Bewijs dat het convolutieproduct $f * g$ van twee multiplicatieve functies f, g multiplicatief is.

b) Bewijs dat er voor elke multiplicatieve functie f een unieke multiplicatieve functie g bestaat met $f * g = e$, waarbij $e(1) = 1$ en $e(n) = 0$ voor $n > 0$. (We schrijven g als f^{-1}.)

c) Gegeven is de arithmetische functie $f(n) = \mu(n) \cdot 5^{\omega(n)}$. Bepaal f^{-1}.

3.*a)* Bewijs dat $\prod_{p \le n} p \le 4^n$ voor elke $n \in \mathbb{N}$ met $n > 1$, waarbij het product wordt genomen over alle priemgetallen $p \le n$.

b) Bewijs dat er voor elke $n > 0$ en elke $\varepsilon > 0$ een x_0 bestaat met de volgende eigenschap: voor alle $x > x_0$ zijn er minstens n priemgetallen p zodat $x \le p < (1 + \varepsilon)x$. Je mag gebruik maken van de priemgetalstelling.

4.*a)* Parametriseer alle oplossingen van $x^2 - 28y^2 = -3$ in $x, y \in \mathbb{Z}$.

b) Zijn p, q gehele getallen met $q > 0$, $\mathrm{ggd}(p, q) = 1$ en $|q\sqrt{28} - p| < |7\sqrt{28} - 37|$. Bewijs dat $q \ge 24$.

5.*a)* Formuleer de stelling van Thue-Siegel-Roth over de benadering van algebraïsche getallen door rationale getallen.

b) Zij d een positief geheel getal met $\sqrt[3]{d} \notin \mathbb{Q}$, en zij $\lambda \in \mathbb{R}$ met $\lambda < 1$. Bewijs dat er maar eindig veel $x, y \in \mathbb{Z}$ zijn met $x > 0$, $y > 0$, en $|x^3 - dy^3| \le y^\lambda$.

c) Bewijs dat er een constante $C > 0$ bestaat zo dat er oneindig veel getallen $x, y \in \mathbb{Z}$ zijn met $x > 0$, $y > 0$ en $|x^3 - dy^3| \le C \cdot y$.

Number Theory

Wednesday June 9, 2004, 14:00-17:00

- It is allowed to use a non-programmable pocket culculator.
- Each exercise has the same weight.

1. *a)* Let p be a prime number with $p > 2$. The residue classes $1 \pmod p, 2 \pmod p, \ldots, \frac{p-1}{2} \pmod p$ are called positive, while $-1 \pmod p, -2 \pmod p, \ldots, -\frac{p-1}{2} \pmod p$ are called negative.
Prove Gauss' Lemma, which states that if a is an integer not divisible by p, then $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^\nu$, where ν denotes the number of negative residue classes modulo p among $a \pmod p$, $2a \pmod p, \ldots, \frac{p-1}{2} \cdot a \pmod p$. You may use that $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{(p-1)/2} \pmod p$.

b) Determine the set of prime numbers p such that $x^2 \equiv 7 \pmod p$ is solvable in integers.

2. *a)* Prove that the convolution product $f * g$ of two multiplicative functions f, g is multiplicative.

b) Prove that for every multiplicative function f there exists a unique multiplicative function g such that $f * g = e$, where $e(1) = 1$ en $e(n) = 0$ voor $n > 0$. (We write g as f^{-1}.)

c) The arithmetical function f is given by $f(n) = \mu(n) \cdot 5^{\omega(n)}$. Determine f^{-1}.

3. *a)* Prove that $\prod_{p \leq n} p \leq 4^n$ for all integers n with $n > 1$, where the product is taken over all prime numbers $p \leq n$.

b) Prove that for every integer $n > 0$ en every $\varepsilon > 0$ there is x_0 with the following properties: or every $x > x_0$ there are at least n prime numbers p such that $x \leq p < (1 + \varepsilon)x$. You may use the Prime Number Theorem.

4. *a)* Parametrize the solutions of $x^2 - 28y^2 = -3$ in $x, y \in \mathbb{Z}$.

b) Let p, q be integers with $q > 0$, $\gcd(p, q) = 1$ and $|q\sqrt{28} - p| < |7\sqrt{28} - 37|$. Prove that $q \geq 24$.

5. *a)* Formulate Roth's Theorem about the approximation of algebraic numbers by rational numbers.

b) Let d be a positive integer with $\sqrt[3]{d} \notin \mathbb{Q}$ and let $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda < 1$. Prove that there are only finitely many positive integers x, y such that $|x^3 - dy^3| \leq y^\lambda$.

c) Prove that there is a constant $C > 0$ such that there are infinitely many positive integers x, y with $|x^3 - dy^3| \leq C \cdot y$.