Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden

Hertentamen Inleiding Kansrekening

8 juli 2014, 14:00–17:00

Je mag geen boek of aantekeningen gebruiken, zakrekenmachines (ook grafisch) zijn wel toegestaan. Schrijf leesbaar en motiveer je antwoorden.

Opgave 1

Je trekt 5 spelkaarten van een (goed geschud) deck met 52 kaarten.
Wat is de kans dat vier van deze vijf kaarten dezelfde waarde hebben ("four of a kind")?
Geef ook een kansruimte voor deze situatie (dus wat is Ω, wat is P)?

Opgave 2

Een stel heeft twee kinderen.
Wat is de kans dat beide kinderen meisjes zijn als je weet dat het oudste kind een meisje is?
Wat is de kans dat beide kinderen meisjes zijn als je weet dat (tenminste) een van hen een meisje is?
(Je mag veronderstellen dat elk kind met kans 50% een meisje is, en dat het geslacht van beide kinderen onafhankelijk is.)

Opgave 3

De gezamenlijke kansdichtheid van X en Y wordt gegeven door

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 < y < x < 1; \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) Zijn X en Y onafhankelijk?

(b) Bereken de marginale dichtheid van Y.

(c) Bereken de gezamenlijke cumulatieve verdelingsfunctie $F_{X,Y}$ van X en Y.

(d) Bereken $E(Y)$.

(e) Bereken $E(Y \mid X)$.

(f) Bereken $P(Y < X)$.

Opgave 4

X en Y zijn onafhankelijk en identiek verdeelde stochasten met de uniforme verdeling op $[0, 1]$. Hun kansdichtheid wordt dus gegeven door $f(x) = 1$ als $x \in [0, 1]$ en $f(x) = 0$ elders. Bereken de kansdichtheid van $V = X \cdot Y$.

Opgave 5

Beschouw twee onafhankelijke stochasten X en Y met variantie σ_X^2 en σ_Y^2. Bereken de correlatiecoëfficiënt $\rho(X - Y, Y - X)$.

Opgave 6

Stel X_1, X_2, X_3, X_4 zijn onafhankelijk exponentieel verdeeld met parameter λ (zie formules op pagina 3). Bereken de kansdichtheid van $M := \max\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$.

Opgave 7

Beschouw de stochasten $X_1, X_2, X_3, \ldots$ en X. Geef de definitie van *convergentie in verdeling* van de rij $X_1, X_2, \ldots$ naar X.

Opgave 8

De stochasten $X_1, \ldots, X_{10}$ zijn onafhankelijk uniform verdeeld op de verzameling $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, dus

$$P(X_i = k) = \frac{1}{5}, \qquad i = 1, \ldots, 10;\ k = 0, \ldots, 4.$$

Defineer $S = \sum_{i=1}^{10} X_i - 20$. Wij zijn geïnteresseerd in de kans $P(|S| > 5)$.

(a) Geef een bovengrens op $P(|S| > 5)$ met de Chebyshev-ongelijkheid.

(b) Schat de kans $P(|S| > 5)$ door normaalbenadering.

(c) Bepaal de moment-genererende functie $M_S(t) = E(e^{tS})$.

Opgave 9

De transitiematrix van een Markovketen op de toestandsruimte $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ wordt gegeven door

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Is deze keten irreducibel?

(b) Wat is de periode van toestand 1?

(c) Bestaat er een stationaire verdeling? Indien wel, welke is/zijn het?

(d) Zijn er absorberende toestanden?

Opgave 10

Beschouw een Markovketen met toestandsruimte $S = \{1, \ldots, r\}$ en transitiematrix $P \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $r \in \mathbb{N}$. Een verdeling $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r)$ heet *reversibel* als

$$\mu_i P_{ij} = \mu_j P_{ji} \qquad \text{voor alle } i, j \in S.$$

Geef de definitie van een stationaire verdeling, en laat zien dat elke reversibele verdeling ook stationair is.

De kansdichtheid van een exponentieel verdeelde stochast X met parameter $\lambda > 0$ wordt gegeven door

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

De cumulatieve verdelingsfunctie is $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ voor $x \geq 0$ en $F_X(x) = 0$ voor $x < 0$.
De verwachtingswaarde is $E(X) = 1/\lambda$, de variantie is $\mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2$.