Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden

Tentamen Inleiding Kansrekening

12 juni 2014, 10:00–13:00

Je mag geen boek of aantekeningen gebruiken, zakrekenmachines (ook grafisch) zijn wel toegestaan. Schrijf leesbaar en motiveer je antwoorden.

Opgave 1

Je trekt 2 speelkaarten van een (goed geschud) deck met 52 kaarten. Wat is de kans dat beide kaarten een aas zijn? Geef ook een kansruimte voor deze situatie (dus wat is Ω, wat is P?)

Opgave 2

Ongeveer 0,2% van de bevolking is drager van een zeldzame ziekte. Er bestaat een test voor deze ziekte, de test is echter niet perfect: Als je ziek bent is de uitslag van de test met kans 99% positief. Als je niet ziek bent is de uitslag met kans 3% positief. Stel de test is positief. Hoe groot is de kans dat je deze zeldzame ziekte hebt?

Opgave 3

De gezamenlijke kansdichtheid van X en Y wordt gegeven door

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4}xy^2, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 2, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) Zijn X en Y onafhankelijk?

(b) Bereken de marginale dichtheid van Y.

(c) Bereken de gezamenlijke cumulatieve verdelingsfunctie $F_{X,Y}$ van X en Y.

(d) Bereken $E(Y)$.

(e) Bereken $E(Y \mid X)$.

(f) Bereken $P(X + Y < 1)$.

Opgave 4

X en Y zijn onafhankelijk en identiek verdeelde stochasten met de uniforme verdeling op $[0, 1]$. Hun kansdichtheid wordt dus gegeven door $f(x) = 1$ als $x \in [0, 1]$ en $f(x) = 0$ elders. Bereken de kansdichtheid van $V = X/Y$.

Opgave 5

Beschouw twee onafhankelijke stochasten X en Y met variantie σ_X^2 en σ_Y^2.
Bereken de covariantie $\mathrm{Cov}(X+2Y, X-2Y)$.

Opgave 6

Stel X_1, X_2, X_3, X_4 zijn onafhankelijk exponentieel verdeeld met parameter λ (formules op pagina 3).
Bereken de cumulatieve verdelingsfunctie van $M := \min\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$.

Opgave 7

Geef de definitie voor bijna zekere convergentie van stochasten.

Opgave 8

De stochasten $X_1, \ldots, X_{20}$ zijn onafhankelijk en identiek verdeeld (i.i.d.), hun verdeling is gegeven door

$$P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = 1/2, \qquad i = 1, \ldots, 20.$$

Wij zijn geïnteresserd in de kans $P(|S| > 10)$ voor $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{20}$.

(a) Geef een bovengrens op $P(|S| > 10)$ met de Chebyshev-ongelijkheid.

(b) Formuleer de centrale limiet stelling.

(c) Schat de kans $P(|S| > 10)$ door normaalbenadering.

(d) Bepaal de moment-genererende functie $M_S(t) = E\big(e^{tS}\big)$.

Opgave 9

De transitiematrix van een Markovketen op de toestandsruimte $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ wordt gegeven door

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Is deze keten irreducibel?

(b) Wat is de periode van toestand 1?

(c) Bestaat er een stationaire verdeling? Indien wel, welke is/zijn het?

(d) Zijn er absorberende toestanden?

Opgave 10

Beschouw een Markovketen met (eindige) toestandsruimte $S = \{1, \ldots, r\}$ en transitiematrix $P \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $r \in \mathbb{N}$. Geef de definitie van een stationaire verdeling van deze Markovketen. Laat vervolgens zien dat als P een symmetrische matrix is, dan is de uniforme verdeling

$$\mu = \big(1/r, 1/r, \ldots, 1/r\big)$$

een stationaire verdeling.

De kansdichtheid van een exponentieel verdeelde stochast X met parameter $\lambda > 0$ wordt gegeven door

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

De cumulatieve verdelingsfunctie is $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ voor $x \geq 0$ en $F_X(x) = 0$ voor $x < 0$.
De verwachtingswaarde is $E(X) = 1/\lambda$, de variantie is $\mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2$.