Universiteit Leiden — Mathematisch Instituut
Niels Bohrweg 1 — 2333 CA Leiden

Tentamen Inleiding Kansrekening
25 juni 2009, 10.00–13.00 uur
Docent: F. den Hollander

Bij dit tentamen is het gebruik van een (grafische) rekenmachine en van een formuleblad toegestaan.

Normering: Elk van de beide typen vragen (meerkeuze en open) bepalen de helft van het cijfer.

Voor beide typen vragen weegt elk vraag even zwaar.

Meerkeuze vragen

1. Laten A en B onafhankelijke gebeurtenissen zijn met $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{4}$ en $\mathrm{P}(B^c) = \frac{2}{3}$. Bereken $\mathrm{P}(A \cup B)$.

   a) $\frac{1}{12}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{5}{12}$ e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{7}{12}$

2. Op hoeveel manieren kan men een stapel maken van 10 verschillende studieboeken, waarvan 8 in de nederlandse en 2 in de engelse taal, zodanig dat de twee engelse studieboeken op elkaar liggen?

   a) 282 240 b) 362 880 c) 564 480 d) 725 760 e) 625 200 f) 240 180

3. Een vaas bevat 3 zwarte, 3 witte en 3 grijze ballen. Achtereenvolgens worden willekeurig 3 ballen uit de vaas getrokken (zonder teruglegging) en in een doos gestopt. Wat is de kans dat na de trekking de doos precies 2 zwarte ballen en 1 grijze bal bevat?

   a) $\frac{1}{14}$ b) $\frac{1}{7}$ c) $\frac{3}{28}$ d) $\frac{9}{56}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{2}$

4. Zij N het kleinste aantal worpen met een zuivere dobbelsteen dat nodig is om 2 keer achter elkaar een 1 te gooien en voordien geen enkele 1. Bereken $\mathrm{P}(N < \infty)$.

   a) $\frac{1}{36}$ b) $\frac{1}{30}$ c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{6}$ f) 1

5. De stochast X is normaal verdeeld met verwachting 0 en variantie 2. Wat is de kansdichtheidsfunctie $f_{X^2}(x)$ van X^2 op $[0, \infty)$?

   a) $[1/2\pi^{1/2}]\,\mathrm{e}^{-x^2/4}$ b) $[1/4\pi]\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ c) $[1/2^{1/2}\pi^{1/4}]\,\mathrm{e}^{-x^2/8}$
   d) $[1/2(\pi x)^{1/2}]\,\mathrm{e}^{-x/4}$ e) $[1/4\pi x]\,\mathrm{e}^{-x/2}$ f) $[1/2^{1/2}(\pi x)^{1/4}]\,\mathrm{e}^{-x/8}$

6. De stochast U heeft kansdichtheidsfunctie $f_U(u) = 2/u^3$ op $(1, \infty)$. Gegeven $U = u$, dan is de conditionele kansdichtheidsfunctie van de

stochast V gelijk aan $f_{V|U}(v|u) = u\mathrm{e}^{-vu}$ op $(0, \infty)$. Wat is de verwachting van V?

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $1/\mathrm{e}$ d) 1 e) e f) ∞

7. Het paar stochasten (X, Y) heeft een gezamenlijke kansmassafunctie gegeven door $p_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{y}(\frac{1}{2})^y \, 1_{\{x \le y\}}$, $x, y \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Bereken $\mathrm{E}[XY]$.

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) 2 d) 4 e) 8 f) ∞

8. Het paar stochasten (X, Y) heeft een gezamenlijke kansmassafunctie gegeven door

$$\mathrm{P}(X = i, Y = j) = \tfrac{1}{36}\, i\, j \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3.$$

Bereken de voorwaardelijke verwachting $\mathrm{E}(X \mid Y)$.

a) 2 b) $2Y$ c) $\frac{7}{3}$ d) $\frac{1}{12}Y$ e) $3Y$ f) $\frac{13}{6}$

9. Laat (X, Y) verdeeld zijn zoals in de vorige opgave. Bereken $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{12}$ e) $\frac{1}{144}$ f) 0

10. De stochast Z heeft momentgenererende functie $M_Z(t) = (2 - \mathrm{e}^t)^{-2}$, $t < \log 2$. Bereken $\mathrm{E}[Z]$.

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) 2 e) 4 f) ∞

11. Zij $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ een Markovketen met toestandsruimte $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ en overgangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 \\ a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{met } a_i > 0 \text{ voor } i = 1, \dots, 8.$$

De periode van deze keten is gelijk aan

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) 6

12. Van een vertakkingsproces wordt de kansgenererende functie van de nakomelingsverdeling gegeven door $G(s) = \frac{1}{4} + ps + (\frac{3}{4} - p)s^2$, waarbij p voldoet aan $0 < p < \frac{3}{4}$. De kans op uitsterven is gelijk aan 1 precies dan wanneer:

a) $0 < p < \frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2} < p < \frac{3}{4}$ c) $0 < p < \frac{1}{4}$
d) $0 < p < \frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{4} < p < \frac{3}{4}$ f) voor geen enkele waarde van p

13. Beschouw de volgende drie beweringen over discrete-tijd Markovketens.

    I) Een irreducibele keten op een eindige toestandsruimte kan geen voorbijgaande toestanden hebben.

    II) Als toestand i voorbijgaand (transient) is, en j is te bereiken vanuit i, dan is ook i vooorbijgaand.

    III) Een keten met 17 toestanden kan geen toestanden met periode 34 hebben.

    Deze uitspraken zijn juist (J) of onjuist (O) in de volgorde I),II),III) volgens:

    a) J,J,O b) J,O,J c) O,J,J d) O,O,J e) O,J,O f) J,O,O

14. Voor de eindige Markovketen met toestandsruimte $S = \{1, 2, 3, 4\}$ en overgangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

    geldt

a) toestand 2 is voorbijgaand	b) de keten is aperiodiek
c) de keten is irreducibel	d) toestand 1 is voorbijgaand
e) toestand 4 is voorbijgaand	f) toestand 3 is voorbijgaand

15. Gegeven een continue-tijd Markovketen op $S = \{1, 2, 3\}$ met generator

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

    De stationaire verdeling is gelijk aan:

    a) $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5})$ b) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ c) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ d) $(\frac{1}{8}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8})$
    e) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ f) geen van de voorafgaande antwoorden

Open vragen

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands.

1. Gegeven zijn 6 munten, genummerd $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, zodanig dat de kans op kop bij een worp met munt i gelijk is aan $i/6$. Gooi herhaaldelijk met een zuivere dobbelsteen. Als de j-de worp van de dobbelsteen gelijk is aan i, werp dan met munt i en noteer $U_j = 1$ als de uitkomst kop is, en noteer anders $U_j = 0$.

   a) Bereken de kansverdeling van U_1.
   b) Bereken $\mathrm{E}[U_1]$ and $\mathrm{Var}(U_1)$.
   c) Formuleer de wet van de grote aantallen en de centrale limietstelling voor de rij van onafhankelijke stochasten $(U_j)_{j \in \mathbb{N}}$.

2. De simultane kansdichtheid $f(x, y)$ van de stochasten X en Y wordt gegeven door:

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y & \text{als } 0 < x < 1 \text{ en } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

   (a) Bepaal de marginale kansdichtheid f_X van X.
   (b) Bepaal de marginale verdelingsfunctie F_X van X.
   (c) Ga na of X en Y onafhankelijk zijn.

3. "Ome Jan's Haircuttery" heeft plaats voor ten hoogste twee klanten. Er is slechts één kapper (namelijk ome Jan). Verder is bekend dat klanten volgens een Poisson proces aankomen bij ome Jan's zaak, met intensiteit van drie klanten per uur. Opeenvolgende servicetijden (d.w.z. de tijd voor het knippen van het haar van een klant) zijn onafhankelijk en exponentieël verdeeld met verwachting $\frac{1}{4}$ uur. Klanten die bij een volle zaak aankomen gaan boos naar een andere kapperszaak en keren niet terug naar ome Jan's zaak.

   (a) Stel een model op met een continue-tijd Markovketen (hint: kijk naar het aantal klanten).
   (b) Wat is het verwachte aantal klanten in ome Jan's zaak?
   (c) Welk percentage van de potentiële klanten gaat verloren voor ome Jan?

Antwoorden multiple choice:

1 e. $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = 1/4 + 1/3 - 1/12 = 6/12.$

2 d. $9 \cdot 2! \cdot 8!$

3 c. $\mathrm{P}(GZZ) + \mathrm{P}(ZGZ) + \mathrm{P}(ZZG) = 3 \cdot \frac{3 \cdot 3 \cdot 2}{9 \cdot 8 \cdot 7} = 6/56.$

4 d.: $\mathrm{P}(N < \infty) = \sum_{n=0}^{\infty} (5/6)^n (1/6)^2 = 1/6.$

5 d. $f_{X^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} f_X(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}} f_X(-\sqrt{x}).$

6 b. $\mathrm{E}[V] = \mathrm{E}[\mathrm{E}(V \mid U)] = \mathrm{E}[1/U] = 2/3.$

7 d. Goede sommatievolgorde kiezen!

$$\mathrm{E}[XY] = \sum_{x=1}^{\infty} x \sum_{y=x}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^y = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 = 4.$$

8 c. Het snelste is het om op te merken dat X en Y onafhankelijk zijn, dus $\mathrm{E}(X \mid Y) = \mathrm{E}[X] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{2}{6} + 3 \cdot \frac{3}{6} = \frac{14}{6}$. Je kunt ook $\mathrm{E}(X \mid Y = j)$ uitrekenen voor $j = 1, 2, 3$.

9 f. Het snelste is het om op te merken dat X en Y onafhankelijk zijn, dus $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$. Je kunt ook $\mathrm{E}[XY] = 49/9$, en $\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[Y] = 7/3$ uitrekenen.

10 d. $M'(t) = -2 \cdot (2 - \mathrm{e}^t)^{-3} \cdot -\mathrm{e}^t$, dus $\mathrm{E}[Z] = M'(0) = 2$.

11 c. Maak een diagram met overgangen, en leidt hier uit af dat $p_{ii}^{[3n+k]} = 0$ voor alle n, $k = 1, 2$ en $i = 1, 2, ..., 6$.

12 f Je kunt de wortels van $G(s) = s$ uitrekenen, maar het handigste is het om de verwachting te bepalen: $\mu = G'(1) = \frac{1}{4} + p + \frac{1}{2} - 2p = \frac{3}{4} - p$; omdat $\mu > 1$ is de kans op uitsterven altijd kleiner dan 1.

13 b: JOJ.

14 c

15 a

Antwoorden open vragen:

1 a) Bereken $P(U_1 = 1) = \sum_{i=1}^{6} (1/6)(i/6) = 7/12$.
b) $E(U_1) = P(U_1 = 1) = 7/12$ en $\mathrm{Var}(U_1) = (7/12) = (7/12)^2 = 35/144$.
c) Gevraagd wordt om m.b.v. de getallen 7/12 and 35/144 de beide stellingen expliciet te formuleren.

2a Natuurlijk geldt $f_X(x) = 0$ voor $x < 0$ en $x > 1$. Voor $0 < x < 1$:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^1 (x+y)\,dy = x + \frac{1}{2}.$$

2b Door integratie van het antwoord van 2a volgt: $F_X(x) = 0$ voor $x \leq 0$,

$$F_X(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x), \quad \text{voor } 0 < x < 1,$$

en natuurlijk $F_X(x) = 1$ voor $x \geq 1$.

2c X en Y zijn afhankelijk, want de simultane dichtheid is niet gelijk aan het product van de marginale dichtheden:

$$f(x,y) = x + y \neq f_X(x) f_Y(y) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right)$$

voor $x, y \in (0,1)$ (ongelijk aan $\frac{1}{2}$ want dan geldt wel gelijkheid).

3a

Definiëer toestand i als de aanwezigheid van i klanten in de zaak ($i = 0, 1, 2$). Met intensiteiten gemeten in aantal aankomsten per uur ziet de generator als volgt uit:

$$G = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 4 & -7 & 3 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

3b Het aantal wachtende klanten is dan 0 bij toestanden 0 en 1, en 1 bij toestand 2 (noot: je kan geen *Markov keten* definieren op $\{0, 1\}$).

Om het verwachte aantal klanten uit te rekenen moet eerst de stationaire verdeling worden uitgerekend. Los

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2)\, G = 0$$

op om $(\pi_0, \pi_1, \pi_2) = (\frac{16}{37}, \frac{12}{37}, \frac{9}{37})$ te krijgen. Het aantal verwachte klanten is dus

$$\frac{12}{37} + 2\frac{9}{37} = \frac{30}{37}.$$

3c De verhouding van de tijd in toestand 2 is $\frac{9}{37}$. Klanten die aankomen in deze periode gaan weg. Omdat het tempo van aankomsten onafhankelijk is van de toestand gaat $\frac{9}{37}$ van alle potentiële klanten weg.