Universiteit Leiden Mathematisch Instituut
Niels Bohrweg 1 2333 CA Leiden

Tentamen Inleiding Kansrekening
21 augustus 2009, 10.00–13.00 uur
Docent: F. den Hollander

Bij dit examen is het gebruik van een (grafische) rekenmachine toegestaan. Ook is toegestaan het raadplegen van een formuleblad (dat aan het begin van het tentamen wordt uitgedeeld en aan het eind van het tentamen weer moet worden ingeleverd). Vergeet niet op elk ingeleverd blad uw naam en studienummer in te vullen.

Normering: De meerkeuzevragen tellen elk voor 3 punten (totaal 45 punten). De open vragen tellen voor $6+3+6$, $10+5$, respectievelijk, $6+6+3$ punten (totaal 45 punten). U krijgt 10 punten cadeau. Uw cijfer is het aantal punten gedeeld door 10.

Meerkeuzevragen

1. Laten A en B gebeurtenissen zijn in een gegeven kansruimte, zodanig dat

$$\mathrm{P}(B \mid A) > \mathrm{P}(B).$$

Dan geldt

a) $\mathrm{P}(A \mid B) < \mathrm{P}(A)$ b) $\mathrm{P}(B \mid A^c) > \mathrm{P}(B)$ c) $\mathrm{P}(A^c \mid B) > \mathrm{P}(A^c)$
d) $\mathrm{P}(A^c \mid B^c) < \mathrm{P}(A^c)$ e) $\mathrm{P}(B^c \mid A^c) < \mathrm{P}(B^c)$ f) $\mathrm{P}(B^c \mid A^c) > \mathrm{P}(B^c)$

2. Van de gebeurtenissen A, B en C is gegeven: $\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \frac{3}{4}$, $\mathrm{P}(B \cup C) = \frac{1}{2}$, de gebeurtenissen A en $B^c \cap C^c$ zijn onafhankelijk. Dan is $\mathrm{P}(A)$ gelijk aan

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{2}{3}$ f) $\frac{3}{4}$

3. Laten a, p en q reëele getallen zijn. De functie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ p & a \leq x < a+2, \\ q & x \geq a+2, \end{cases}$$

is een verdelingsfunctie mits voldaan is aan

a) $p = 0,\ q = 1$ b) $p = 0,\ q \geq 0$ c) $p \geq 0,\ p + q = 1$
d) $0 \leq p \leq q = 1$ e) $a \geq 0,\ 0 \leq p \leq q = 1$ f) $a \leq 0,\ 0 \leq p \leq q = 1$

4. Stel je kiest uit een doos met 3 blauwe, 4 rode en 5 gele vlinders zonder terugleggen willekeurig 3 vlinders. Wat is de kans dat hun kleuren verschillend zijn?

a) $\frac{1}{60}$ b) $\frac{1}{30}$ c) $\frac{1}{22}$ d) $\frac{1}{10}$ e) $\frac{3}{11}$ f) $\frac{1}{4}$

5. Zij M het maximum van 3 punten die onafhankelijk en willekeurig worden gekozen in het interval $[0, 1]$. Dan is de verwachting van M gelijk aan

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{5}{6}$ e) $\frac{6}{7}$ f) $\frac{7}{8}$

6. Laten $f(x)$ en $g(y)$ kansdichtheidsfuncties zijn met $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, x f(x) + \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, y g(y) = 0$. Welke van de volgende dubbele integralen is gelijk aan de som van de enkele integralen $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, x^2 f(x)$ en $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, y^2 g(y)$?

a) $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, (x^2 + y^2) f(x) g(y)$
b) $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, x^2 f(x) g(y - x)$
c) $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, y^2 f(x) g(y - x)$
d) $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, (x - y)^2 f(x) g(y)$
e) $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, (x + y)^2 f(x) g(y)$
f) geen van bovenstaande alternatieven

7. Het paar stochasten (X, Y) heeft een gezamenlijke dichtheidsfunctie gegeven door $f_{X,Y}(x, y) = 3x^{-2}y^{-3}\, 1_{\{x \geq y \geq 1\}}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Bereken $\mathrm{E}\left[\frac{Y}{X}\right]$.

a) ∞ b) 4 c) 2 d) 1 e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{4}$

8. Laten $X_1, \ldots, X_{100}$ onafhankelijke stochasten zijn met dezelfde verdeling. Gegeven is dat $\mathrm{E}[X_1] = 172$ en $\mathrm{Var}(X_1) = 36$. Geef met behulp van de Centrale Limietstelling (en een tabel voor de normale verdeling) een benadering van de kans $\mathrm{P}(X_1 + \cdots + X_{100} > 17\,280)$.

a) 0.092 b) 0.107 c) 0.127 d) 0.149 e) 0.173 f) 0.200

9. X en Y zijn onafhankelijke discrete stochastische variabelen met kansverdeling gegeven door

$$\mathrm{P}(X = 1) = \tfrac{1}{10},\ \mathrm{P}(X = 2) = \tfrac{3}{10},\ \mathrm{P}(X = 3) = \tfrac{2}{10},\ \mathrm{P}(X = 4) = \tfrac{2}{10},\ \mathrm{P}(X = 5) = \tfrac{2}{10}$$

en

$$\mathrm{P}(Y = 1) = \tfrac{1}{10},\ \mathrm{P}(Y = 2) = \tfrac{4}{10},\ \mathrm{P}(Y = 3) = \tfrac{1}{10},\ \mathrm{P}(Y = 4) = \tfrac{1}{10},\ \mathrm{P}(Y = 5) = \tfrac{3}{10}.$$

Wat is de waarde van $\mathrm{E}[XY]$?

a) 0.69 b) 3.10 c) 6.20 d) 8.99 e) 9.61 f) 10.10

10. Beschouw het vertakkingsproces $(Z_n)_{n=0}^{\infty}$ gegeven door $Z_0 = 1$, en $\mathrm{P}(Z_1 = k) = p_k$ met $p_0 = \frac{1}{2}$, $p_5 = \frac{1}{2}$. Dan is de kans dat het proces op tijdstip 2 uitgestorven is gelijk aan

a) $\frac{16}{64}$ b) $\frac{20}{64}$ c) $\frac{24}{64}$ d) $\frac{33}{64}$ e) $\frac{37}{64}$ f) $\frac{41}{64}$

11. Beschouw het vertakkingsproces $(Z_n)_{n=0}^{\infty}$ gegeven door $Z_0 = 1$, en $\mathrm{P}(Z_1 = k) = p_k$ met $p_0 = \alpha$ en $p_5 = 1 - \alpha$, waar $\alpha \in [0, 1]$. Voor welke α is de kans op uitsterven gelijk aan 1?

a) $\alpha = 1$ b) $\alpha \leq \frac{4}{5}$ c) $\alpha \leq \frac{3}{10}$ d) $\alpha > \frac{3}{5}$ e) $\alpha > \frac{1}{3}$ f) $\alpha \leq \frac{1}{3}$

12. Laten $(X_n)_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d. stochastische variabelen zijn met kansverdeling $\mathrm{P}(X_1 = 0) = \frac{3}{4}$ en $\mathrm{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{4}$. Zij N de eerste index waarvoor $X_1 + \cdots + X_N = 2$. Dan is $\mathrm{E}[N]$ gelijk aan

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7 f) 8

13. De functies $F_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, zijn gegeven door

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{2} & x \in [0, \frac{1}{n}) \\ 1 & x \in [\frac{1}{n}, \infty). \end{cases}$$

Zij F de punstgewijze limiet van F_n voor $n \to \infty$. Dan is de volgende bewering juist:

a) (F_n) en F zijn geen verdelingsfuncties
b) (F_n) zijn verdelingsfuncties, F is geen verdelingsfunctie
c) (F_n) zijn geen verdelingsfuncties, F is een verdelingsfunctie
d) (F_n) en F zijn verdelingsfuncties en F_n convergeert niet naar F in verdeling
e) (F_n) en F zijn verdelingsfuncties en F_n convergeert naar F in verdeling
f) geen van bovenstaande alternatieven

14. Zij $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ de Markovketen met toestandsruimte $\{1,2,3,4,5\}$ en overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Dan zijn precies de volgende toestanden transient (= voorbijgaand):

a) geen
b) $\{1\}$
c) $\{1,2\}$
d) $\{1,2,3\}$
e) $\{1,2,3,4\}$
f) alle

15. Zij $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ de Markovketen met toestandsruimte $\{1,2\}$ en overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

De stationaire verdeling is dan gelijk aan

a) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ b) $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ c) $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ d) $(\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$ e) $(\frac{1}{6}, \frac{5}{6})$ f) $(\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$

Open vragen

Toelichting: Een los antwoord is *niet* voldoende. U dient een heldere berekening, toelichting en/of motivatie te geven.

1. Gegeven zijn 3 munten waarvan de kans op kop gelijk is aan $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, respectievelijk, $\frac{2}{3}$. Kies 3 keer willekeurig een van de 3 munten en werp die.

a. Zij N het totaal aantal keren kop in de 3 worpen. Wat is de kansverdeling van N?

b. Bereken $\mathrm{E}[N]$.

c. Wat is het antwoord in **b** wanneer we de 3 worpen doen zonder terugleggen van de munt? Licht het antwoord toe.

2. Peter wil zijn parketvloer van $36\,\mathrm{m}^2$ gladschuren en huurt hiertoe bij firma PARKO een schuurmachine. Het gladschuren van een vierkante meter kost Peter een tijd die uniform verdeeld is met ondergrens 10 minuten en bovengrens 20 minuten. De machine kan slechts voor hele dagen gehuurd worden en kost **€** 25 per dag. Peter werkt 8,5 uur per dag.

a. Stel dat $X_1, \ldots, X_{36}$ onafhankelijk en uniform verdeeld zijn op $[10, 20]$. Dan is de totale tijdsduur in minuten voor het gladschuren van de parketvloer gelijk aan $X_1 + \cdots + X_{36}$. Bereken met behulp van de Centrale Limietstelling (en een tabel voor de normale verdeling) de kans dat de huursom **€** 25 bedraagt. (Peter brengt de schuurmachine na het karwei onmiddellijk terug. PARKO is 24 uur per dag open.)

b. Wat zijn, in normale benadering, de gemiddelde kosten?

3. Beschouw het eenvoudig geboorteproces met intensiteit $\lambda > 0$, d.w.z. het Markovproces $(X(t))_{t \geq 0}$ met generator $Q = (q_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ gelijk aan $q_{j,j+1} = \lambda j$, $j \in \mathbb{N}$, en nul elders buiten de diagonaal. De startwaarde is $X(0) = 1$. Zij

$$p_j(t) = \mathrm{P}\left(X(t) = j\right), \qquad j \in \mathbb{N},\ t \geq 0.$$

a. Geef de voorwaartse vergelijking, inclusief de randconditie, van dit Markovproces.

b. Laat zien dat

$$p_j(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t})^{j-1}, \qquad j \in \mathbb{N},\ t \geq 0.$$

c. Bereken $\mathrm{E}\left[X(t)\right]$ m.b.v. onderdeel **a**.

Antwoorden multiple choice:

1 f $\mathrm{P}(A\cap B)>\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$ impliceert $\mathrm{P}(A^c\cap B^c)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=1-[\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)]>1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)=[1-\mathrm{P}(A)][1-\mathrm{P}(B)]=\mathrm{P}(A^c)\,\mathrm{P}(B^c)$.

2 d Ook A en $[B^c\cap C^c]^c=B\cup C$ zijn onafhankelijk, en derhalve geldt $\frac{3}{4}=\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B\cup C)-\mathrm{P}(A\cap[B\cup C])=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B\cup C)-\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\frac{1}{2}-\mathrm{P}(A)\,\frac{1}{2}$. Oplossen geeft $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$.

3 d Een verdelingsfunctie is niet-dalend, rechtscontinu, met limieten 0 in $-\infty$ en 1 in ∞. Derhalve volstaat het te eisen dat $a\in\mathbb{R}$, $p\geq 0$ en $q=1$.

4 e $3!\,\frac{3\times4\times5}{12\times11\times10}=\frac{3}{11}$.

5 b Geldt $\mathrm{P}(M\leq x)=x^3$, $0\leq x\leq 1$. Derhalve heeft M kansdichtheidsfunctie $f(x)=3x^2\,1_{[0,1]}(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Hiermee volgt $\mathrm{E}[M]=\int_0^1 3x^3\mathrm{d}x=\frac{3}{4}$.

6 a Uitwerken van de dubbele integraal in **a** geeft het resultaat. De dubbele integralen in **b** en **c** kunnen niet worden uitgewerkt. Bij de dubbele integralen in **d** en **e** is er een extra term $\pm2\,(\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}x\,xf(x))(\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}y\,yg(y))$, die i.h.a. niet nul is.

7 e Bereken $\mathrm{E}[Y/X]=\int_1^\infty\mathrm{d}y\int_y^\infty\mathrm{d}x\,3x^{-3}y^{-2}=\frac{3}{2}\int_1^\infty\mathrm{d}y\,y^{-4}=\frac{1}{2}$.

8 a Zij $S=X_1+\cdots+X_{100}$. Dan is

$$\mathrm{P}(S>17\,280)\approx P\left((S-17200)/10\sqrt{36}>80/10\sqrt{36}\right)\approx P\left(N>\tfrac{4}{3}\right)=0.092.$$

9 e Bereken $\mathrm{E}[X]=\frac{1}{10}(1\times1+3\times2+2\times3+2\times4+2\times5)=\frac{31}{10}$ en $\mathrm{E}[Y]=\frac{1}{10}(1\times1+4\times2+1\times3+1\times4+3\times5)=\frac{31}{10}$. Vanwege onafhankelijkheid geldt $\mathrm{E}[XY]=\mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]=(\frac{31}{10})^2=9.61$.

10 d $\mathrm{P}(Z_2=0)=\mathrm{P}(Z_1=0)+\mathrm{P}(Z_2=0\mid Z_1>0)\,\mathrm{P}(Z_1>0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^5=\frac{33}{64}$.

11 b De kasn op uitsterven is 1 dan en slechts dan als $\mathrm{E}[Z_1]\leq 1$, en $\mathrm{E}[Z_1]=5(1-\alpha)$.

12 f Omdat $X_n\in\{0,1\}$ voor alle n, geldt dat $\mathrm{E}[N]=2\mathrm{E}\left[\bar{N}\right]$ met $\bar{N}$ de eerste index waarvoor $X_1+\cdots+X_{\bar{N}}=1$. Derhalve $\mathrm{P}\left(\bar{N}=n\right)=\frac{1}{4}(\frac{3}{4})^{n-1}$ en hieruit volgt $\mathrm{E}\left[\bar{N}\right]=4$.

13 b Omdat F_n niet-dalend en rechtscontinu is met limieten 0 in $-\infty$ en 1 in ∞, kwalificeert F_n als een verdelingsfunctie. De punstgewijze limiet van F_n voor $n\to\infty$ is de functie F met $F(x)=0$ voor $x<0$, $F(0)=\frac{1}{2}$ en $F(x)=1$ voor $x>0$. Dit is geen rechtscontinue functie is, en dus kwalificeert F niet als een verdelingsfunctie.

14 c Een plaatje van de overgangskansen laat zien dat de verzameling $\{1,2\}$ transient is, terwijl de verzameling $\{3,4,5\}$ recurrent en irreducibel is.

15 f Zij $\pi=(\pi_1,\pi_2)$ de stationaire verdeling. De vergelijking $\pi=\pi P$ geeft $\frac{1}{4}\pi_1+\frac{1}{2}\pi_2=\pi_1$ en $\frac{3}{4}\pi_1+\frac{1}{2}\pi_2=\pi_2$, waaruit volgt dat $\frac{3}{4}\pi_1=\frac{1}{2}\pi_2$. Samen met $\pi_1+\pi_2=1$ geeft dit $\pi_1=\frac{2}{5}$ en $\pi_2=\frac{3}{5}$.

Antwoorden open vragen:

1a Laten X_1,X_2,X_3 de uitkomsten zijn van de 3 worpen. Dit zijn i.i.d. stochastische variabelen met $\mathrm{P}(X_1=\text{kop})=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}$. Derhalve $\mathrm{P}(N=n)=\binom{3}{n}(\frac{1}{2})^n$, $n=0,1,2,3$.

1b $\mathrm{E}[N] = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

1c $\mathrm{E}[N] = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$.

2a $\mathrm{E}[X] = \mu = 15$ en $\mathrm{Var}[X] = \sigma^2 = \frac{25}{3}$. De kans dat de huursom € 25 bedraagt is

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}\left(X_1 + \cdots + X_{36} < 8,5 \times 60\right) = \mathrm{P}\left(X_1 + \cdots + X_{36} < 510\right) \\ \approx\ &\mathrm{P}\left(N < \frac{510 - 36 \times 15}{\sqrt{36 \times \frac{25}{3}}}\right) = \mathrm{P}\left(N < -1.73\right) = \mathrm{P}\left(N > 1.73\right) = 0.0418. \end{aligned}$$

2b De gemiddelde kosten in euro zijn: $0,0418 \times 25 + 0,9582 \times 50 = 48,95$.

3a

$$p_j'(t) = (j-1)\lambda\, p_{j-1}(t) - j\lambda\, p_j(t)$$

met randconditie $p_j(0) = \delta_{j1}$.

3b We moeten laten zien dat $p_j(t)$ voldoet aan de voorwaartse vergelijking met randconditie $p_j(0) = \delta_{j1}$. De voorgestelde oplossing voldoet inderdaad aan deze randconditie, en differentiatie naar t levert

$$\begin{aligned} p_j'(t) &= -\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t})^{j-1} + \mathrm{e}^{-\lambda t}\,(j-1)(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t})^{j-2}\,\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \\ &= \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t})^{j-2}\,[(j-1) - j(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t})], \end{aligned}$$

waar het rechterlid inderdaad gelijk is aan dat van de voorwaartse vergelijking.

3c Volgens onderdeel **a** is $X(t)$ geometrisch verdeeld met parameter $\mathrm{e}^{-\lambda t}$. Derhalve is $\mathrm{E}[X(t)] = 1/\mathrm{e}^{-\lambda t} = \mathrm{e}^{\lambda t}$.