Formulebladen meenemen!

Tentamen Inleiding Kansrekening

24 juni 2010, 10.00–13.00 uur

Docent: F. den Hollander

Bij dit examen is het gebruik van een (evt. grafische) rekenmachine toegestaan. Ook toegestaan is een formuleblad, dat wordt uitgedeeld en na afloop weer moet worden ingeleverd!
Normering: De 15 meerkeuzevragen en de 4 open vragen (met samen 9 onderdelen) tellen elk voor de helft van het cijfer. Voor elke meerkeuzevraag krijgt u 3 punten, voor elk onderdeel van een open vraag 5 punten. Totaal zijn er dus 90 punten te behalen. U krijgt 10 punten kado. Cijfer: aantal punten gedeeld door 10.

Meerkeuze vragen

1. Als $\mathrm{P}(A) = 0.3$ en $\mathrm{P}(B) = 0.6$, dan is

   a) $\mathrm{P}(A \cup B) \leq 0.8$ b) $\mathrm{P}(A \cap B) \geq 0.3$ c) $\mathrm{P}(B \backslash A) \geq 0.3$
   d) $\mathrm{P}(A \backslash B) \leq 0.2$ e) $\mathrm{P}(A \cup B) = 0.9$ f) $\mathrm{P}(A \backslash B) = 0.3$

2. In een la zitten 6 identieke paren zwarte sokken en 6 identieke paren bruine sokken. Een week lang kiest u elke dag een nieuw paar sokken. Op hoeveel manieren kunt u die week 3 keer met zwarte en 4 keer met bruine sokken lopen?

   a) $\binom{7}{3}$ b) $\binom{4}{3}$ c) $\binom{6}{3}\binom{6}{4}$
   d) $\binom{7}{3}\binom{7}{4}$ e) $\binom{6}{3} + \binom{6}{4}$ f) géén van deze alternatieven

3. Het aantal drukfouten per pagina van een gegeven boek is Poisson verdeeld met parameter 2. Wat is de kans dat op de eerste twee pagina's precies 2 fouten staan?

   a) $2\mathrm{e}^{-2}$ b) $4\mathrm{e}^{-2}$ c) $8\mathrm{e}^{-2}$ d) $8\mathrm{e}^{-4}$ e) $4\mathrm{e}^{-4}$ f) $2\mathrm{e}^{-4}$

4. De stochastische variabele X heeft een geometrische verdeling met parameter $p = \frac{1}{80}$. Dan geldt dat $\mathrm{E}(X \mid X \geq 50)$ gelijk is aan

   a) 96 b) 105 c) 114 d) 129 e) 118 f) 121

   N.B. Maak gebruik van de formule $\sum_{k=N}^{\infty} q^{k-1} = \frac{q^{N-1}}{1-q}$, $|q| < 1$.

5. Laat X_1 en X_2 onafhankelijk en identiek verdeeld zijn met kansdichtheidsfunctie

   $$f_{X_1}(x) = f_{X_2}(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,1_{[0,\infty)}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   Dan is de kansdichtheidsfunctie $f_U(u)$ van $U = X_1^2 + X_2^2$ voor $u < 0$ gelijk aan 0 en voor $u \geq 0$ gelijk aan

   a) e^{-u} b) $u\mathrm{e}^{-u}$ c) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-u^2}$
   d) $\frac{1}{2}u^2\mathrm{e}^{-u}$ e) $1 - (u+1)\mathrm{e}^{-u}$ f) $2u\mathrm{e}^{-u^2}$

6. Zij K een discrete stochastische variabele met waarden in de natuurlijke getallen $\{0, 1, 2, \ldots\}$ en met kansmassafunctie

$$p_K(0) = 0, \quad p_K(1) = 0, \quad p_K(k) = c\,(\tfrac{1}{3})^k \text{ als } k \in \{2, 3, 4, \ldots\}.$$

Bepaal c.

a) 2 b) 3 c) 6 d) $\frac{32}{3}$ e) $\frac{125}{2}$ f) $\frac{208}{9}$

7. Als bekend is dat de lengte van Nederlandse mannen goed beschreven wordt door een normale verdeling met gemiddelde 185 cm en een standaardafwijking van 10 cm, wat is dan de kans dat een Nederlandse man kleiner dan 175 cm is?

a) 0.1587 b) 0.3085 c) 0.0668 d) 0.0228 e) 0.0162 f) 0.0047

8. Zij (X, Y) het paar stochastische variabelen met gezamenlijke kansdichtheidsfunctie

$$f_{X,Y}(x, y) = \tfrac{1}{y}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}\,\mathrm{e}^{-y}\,1_{[0,\infty)\times(0,\infty)}(x, y).$$

Bereken $E(X \mid Y)$.

a) $\frac{X}{Y}\,\mathrm{e}^{-\frac{X}{Y}}\,\mathrm{e}^{-Y}$ b) $\frac{X}{Y}\,\mathrm{e}^{-Y}$ c) e^{-Y}
d) Y e) ∞ f) géén van deze alternatieven

9. Laat X een stochastische variabele zijn met waarden in $\{0, 1, 2, \ldots\}$ en met kansgenererende functie $\mathrm{E}\left[s^X\right] = G(s)$. Zij Y de stochastische variable, onafhankelijk van X, met kansverdeling

$$\mathrm{P}\,(Y = 0) = \tfrac{1}{4} \text{ en } \mathrm{P}\,(Y = 1) = \tfrac{3}{4}.$$

Zij $Z = XY$. Dan is de kansgenererende functie van Z gelijk aan

a) $G(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}s)$ b) $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}G(s)$
c) $(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}s)G(s)$ d) $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}sG(s)$
e) $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}G^2(s)$ f) géén van deze alternatieven

10. Gegeven is een Markovketen met toestandsruimte $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ en overgangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{7}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De periode van deze Markovketen is gelijk aan

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) 6

11. Zij $(Z_n)_{n=0}^{\infty}$ het vertakkingsproces met $Z_0 = 1$ en $\mathrm{P}\,(Z_1 = 0) = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P}\,(Z_1 = 1) = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P}\,(Z_1 = 3) = \frac{1}{2}$. De uitsterfkans π_0 voldoet dan aan

a) $\pi_0 = 1$ b) $\pi_0 \in [0.75, 1)$ c) $\pi_0 \in [0.5, 0.75)$
d) $\pi_0 \in [0.25, 0.5)$ e) $\pi_0 \in (0, 0.25)$ f) $\pi_0 = 0$

12. Een Markov keten $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ met toestandsruimte $\{0, 1, 2, \ldots\}$ heeft overgangskansen $p_{i,i+2} = \frac{1}{2}$, $p_{i,1} = \frac{1}{2}$ voor $i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. De verzameling voorbijgaande (= transiente) toestanden van deze keten is gelijk aan:

    a) $\emptyset$ b) $\{0\}$ c) $\{0, 1, 2, \ldots\}$
    d) $\{1, 2, 3, \ldots\}$ e) $\{1, 3, 5, \ldots\}$ f) $\{0, 2, 4, \ldots\}$

13. Beschouw de volgende drie beweringen m.b.t. de momentgenererende functie M_X van een willekeurige stochastische variabele X:

    - $M_X(t) < \infty$ voor alle $t \in \mathbb{R}$.
    - $M_X(t) < \infty$ voor alle t in een open omgeving van $t = 0$.
    - $M_X(0) = 1$.

    Deze uitspraken zijn juist (J) of onjuist (O) in de volgorde:

    a) J,J,O b) J,O,J c) O,J,J d) O,O,J e) O,J,O f) J,O,O

14. Stel dat $X_1, \ldots, X_{15}$ onafhankelijk zijn en uniform verdeeld op $[-1, 1]$. Zij $p = \mathrm{P}\left(|X_1 + \cdots + X_{15}| \geq 5\right)$. Dan geeft de ongelijkheid van Chebyshev dat

    a) $p \geq \frac{1}{10}$ b) $p \geq \frac{1}{5}$ c) $p \geq \frac{1}{3}$
    d) $p \leq \frac{1}{10}$ e) $p \leq \frac{1}{5}$ f) $p \leq \frac{1}{3}$

15. De generator van een continue-tijd Markovproces met toestandsruimte $\{1, 2\}$ is gegeven door

$$Q = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

    Welke fractie van de tijd brengt dit Markovproces door in toestand 1 wanneer het in evenwicht is?

    a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{3}$
    e) $\frac{1}{2}$ f) géén van deze antwoorden

Open vragen

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie toegevoegd te worden, die goed leesbaar is opgeschreven.

1. Stel dat X en Y discrete stochasten variabelen zijn met waarden in $\{0, 1, 2\}$. Van de simultane verdeling is gegeven dat

		x: 0	1	2	
	0	$\frac{5}{36}$	$\cdot$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{3}$
y	1	0	$\frac{4}{36}$	$\cdot$	$\frac{1}{3}$
	2	$\cdot$	$\frac{2}{36}$	$\cdot$	$\cdot$
		$\frac{1}{3}$	$\cdot$	$\cdot$	1

a) Voltooi de tabel.

b) Bereken de verwachting van X, de verwachting van Y, en de covariantie tussen X en Y.

c) Zijn X en Y onafhankelijk?

2. Gegeven zijn twee onafhankelijke en identiek verdeeld stochastische variabelen: U en V, beide geometrisch verdeeld met parameter p. Zij $W = U + V$.

   Bereken de kansmassafunctie van W.

3. Gooi herhaald met een zuivere dobbelsteen.

   a) Geef een formule voor

   $$p_n = \mathrm{P}\left(\text{minstens } n \text{ zessen gooien in } 6n \text{ worpen}\right).$$

   b) Bereken $\lim_{n\to\infty} p_n$. *Aanwijzing:* Pas de Centrale Limiet Stelling toe.

4. Op tijdstip $n = 0$ start een preparaat bloed met één rode cel. Op tijdstip $n = 1$ sterft de rode cel en wordt vervangen door één van de volgende combinaties met de daarbij aangegeven kansen

2 rode cellen	$\frac{1}{4}$
1 rode cel en 1 witte cel	$\frac{2}{3}$
2 witte cellen	$\frac{1}{12}$.

   Iedere rode cel leeft vervolgens 1 tijdseenheid en produceert daarna op dezelfde manier nakomelingen, onafhankelijk van de andere cellen in het preparaat. Iedere witte cel leeft 1 tijdseenheid en sterft daarna zonder nakomelingen.

   a) Wat is de kans dat tot en met tijdstip N het preparaat precies één rode cel heeft.

   b) Wat is de kans dat tot en met tijdstip N het preparaat géén witte cellen heeft?

   c) Wat is de uitsterfkans van de celpopulatie?

Antwoorden multiple choice:

1 c $\mathrm{P}(B \backslash A) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(B \cap A) \geq \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A) = 0.6 - 0.3 = 0.3$. Geen van de andere opties is algemeen geldig.

2 a Het is niet relevant welke zwarte en bruine sokken worden gekozen. Het aantal manieren om 3 keer zwart en (dus) 4 keer bruin te dragen in een week is derhalve $\binom{7}{3}$.

3 d $\mathrm{P}(20) + \mathrm{P}(11) + \mathrm{P}(20) = (2+4+2)\mathrm{e}^{-4} = 8\mathrm{e}^{-4}$.

4 d $\sum_{k=N}^{\infty} k(1-q)q^{k-1} / \sum_{k=N}^{\infty}(1-q)q^{k-1} = [N(1-q)+x]/(1-q)$. Voor $N = 50$ en $q = 1 - p = \frac{79}{80}$ is dit quotient gelijk aan 129.

5 b Ga over op de variabelen $v = x_1^2, w = x_2^2$. Dan volgt

$$\mathrm{P}(U \leq u) = \int_0^u \mathrm{d}v\, \mathrm{e}^{-v} \int_0^{u-v} \mathrm{d}w\, \mathrm{e}^{-w} = \int_0^u \mathrm{d}v\, \mathrm{e}^{-v}[1 - \mathrm{e}^{-u-v}] = (1 - \mathrm{e}^{-u}) - u\mathrm{e}^{-u}.$$

Differenteer naar u.

6 c De kansen moeten tot 1 optellen. Bereken

$$\sum_{k=2}^{\infty} (\tfrac{1}{3})^k = \tfrac{3}{2} - 1 - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6}.$$

Derhalve moet dus $c = 6$ gekozen worden.

7 a $\mathrm{P}(X \leq 175) = \mathrm{P}([X - 185]/10 \leq -1) \approx \mathrm{P}(Z \leq -1) = \mathrm{P}(Z \geq 1)$, met Z standaard normaal verdeeld. De tabel op het formuleblad geeft de waarde 0.1587.

8 d Bereken

$$f_Y(y) = \frac{1}{y}\,\mathrm{e}^{-y} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-y}.$$

Dit geeft

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{y}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}},$$

en dus

$$E(X \mid Y = y) = \int_0^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{x}{y}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x = y.$$

9 b $\mathrm{P}(Z = 0) = \mathrm{P}(Y = 0) = \frac{1}{4}$ en $\mathrm{P}(Z = k) = \mathrm{P}(Y = 1)\,\mathrm{P}(X = k) = \frac{3}{4}\mathrm{P}(X = k)$ voor $k \in \mathbb{N}$.

10 e Teken een diagram met de toegestane overgangen. De Markovketen doorloopt achtereenvolgens de toestanden 1, 2, $\{3, 4\}$, $\{5, 6\}$, 7 en daarna weer terug naar 1.

11 d De kansgenererende functie van de vertakkingsverdeling is $G(s) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}s + \frac{1}{2}s^3$. De uitsterfkans π_0 is de kleinste oplossing van de vergelijking $s = G(s)$. Omdat $G(\frac{1}{2}) < \frac{1}{2}$ en $G(\frac{1}{4}) > \frac{1}{4}$, geldt dat $\frac{1}{4} < \pi_0 < \frac{1}{2}$.

12 f Merk op dat de Markovketen vanuit elke toestand naar toestand 1 kan springen, terwijl toestand 1 met geen enkele even toestand communiceert maar wel met alle oneven toestanden communiceert.

13 d Het is mogelijk dat $M_X(t) = \infty$ voor alle $t \neq 0$, bijvoorbeeld wanneer X Cauchy verdeeld is.

14 e Chebyshev geeft

$$p \leq 5^{-2}\,\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_{15}) = 5^{-2}\,15\,\mathrm{Var}(X_1) = 5^{-2}\,15\,\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{5}.$$

15 d De evenwichtsverdeling $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ is de oplossing van de vergelijking $\pi Q = 0$. Dit geeft de relatie $4\pi_1 = 2\pi_2$, en met $\pi_1 + \pi_2 = 1$ volgt $\pi_1 = \frac{1}{3}$ en $\pi_2 = \frac{2}{3}$.

Antwoorden open vragen:

1 a) Bereken achtereenvolgens

$$\mathrm{P}(X=1, Y=0) = \tfrac{6}{36}, \quad \mathrm{P}(X=2, Y=1) = \tfrac{8}{36}, \quad \mathrm{P}(X=0, Y=2) = \tfrac{7}{36},$$
$$\mathrm{P}(X=2, Y=2) = \tfrac{3}{36}, \quad \mathrm{P}(X=1) = \mathrm{P}(X=2) = \tfrac{1}{3}, \quad \mathrm{P}(Y=2) = \tfrac{1}{3}.$$

b) $EX = EY = 1$, $EXY = 1 \Longrightarrow \mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.
c) Nee, omdat $\mathrm{P}(X=0, Y=0) = \frac{5}{36} \neq \mathrm{P}(X=0)\,\mathrm{P}(Y=0) = (\frac{1}{3})^2$.

2 Bereken, voor $k = 2, 3, 4, \ldots$,

$$\mathrm{P}(W=k) = \mathrm{P}(U+V=k) = \sum_{l=1}^{k-1} \mathrm{P}(U=l)\,\mathrm{P}(V=k-l)$$
$$= \sum_{l=1}^{k-1} p(1-p)^{l-1}\,p(1-p)^{k-l-1} = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}.$$

3 a) Zij X_i de indicator van de gebeurtenis dat de i-de worp een zes oplevert. Dan geldt dus dat $\mathrm{P}(X_i = 0) = \frac{5}{6}$ en $\mathrm{P}(X_i = 1) = \frac{1}{6}$. De gevraagde kans is derhalve gelijk aan

$$p_n = \mathrm{P}(X_1 + \cdots + X_{6n} \geq n) = \sum_{k=n}^{6n} \binom{6n}{k} (\tfrac{1}{6})^k\,(\tfrac{5}{6})^{6n-k}.$$

b) Merk op dat $E(X_i) = \frac{1}{6}$ en $\mathrm{Var}(X_i) = \frac{5}{36}$. Herschrijf

$$p_n = \mathrm{P}\left(\left[(X_1 + \cdots + X_{6n}) - n\right] / \sqrt{\tfrac{5n}{6}} \geq 0\right).$$

Dit geeft $\lim_{n\to\infty} p_n = \mathrm{P}(Z \geq 0)$, met Z een standaard normaal verdeelde stochastische variabele. (Merk op dat de variantie van X_i voor deze laatste bewering niet relevant is.) Er geldt dat $\mathrm{P}(Z \geq 0) = \frac{1}{2}$.

4 a) Om steeds één rode cel in het preparaat te hebben, moet die rode cel zich splitsen in een rode en een witte cel. De gevraagde kans is derhalve gelijk aan $(\frac{2}{3})^N$.
b) Om steeds louter rode cellen in het preparaat te hebben, moet elke rode cel zich in 2 rode cellen splitsen. Op tijdstip k zijn er dan precies 2^k rode cellen. De kans dat elk van die cellen op tijdstip $k+1$ weer 2 rode cellen genereren is

$$(\tfrac{1}{4})^{2^k}.$$

Omdat

$$\sum_{k=0}^{N-1} 2^k = 2^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} (\tfrac{1}{2})^l = 2^{N-1}\,2[1 - (\tfrac{1}{2})^N] = 2^N - 1,$$

is de gevraagde kans gelijk $(\frac{1}{4})^{2^N - 1}$.
c) Omdat de witte cellen geen nakomelingen hebben wordt de uitsterfkans volledig bepaald door het vertakkingsproces van de rode cellen. De nakomelingenverdeling hiervan heeft kansgenererende functie $G(s) = \frac{1}{12} + \frac{2}{3}s + \frac{1}{4}s^2$. De uitsterfkans π_0 is de kleinste oplossing van de vergelijking $s = G(s)$. Omdat $G(s) - s = \frac{1}{12}(3s-1)(s-1)$, geeft dit $\pi_0 = \frac{1}{3}$.