Universiteit Leiden — Mathematisch Instituut
Niels Bohrweg 1 — 2333 CA Leiden

Tentamen Inleiding Kansrekening

12 augustus 2010, 10.00–13.00 uur
Docent: F. den Hollander

Bij dit tentamen is het gebruik van een (grafische) rekenmachine en van een (uitgereikt) formuleblad toegestaan. Er zijn 15 meerkeuzevragen en 3 open vragen. De open vragen bestaan tezamen uit 9 onderdelen. Voor elke meerkeuzevraag krijgt u 3 punten, voor elk onderdeel van een open vraag 5 punten. Totaal zijn er dus 90 punten te behalen. U krijgt 10 punten kado. Het tentamencijfer is het aantal punten gedeeld door 10. Voor de onderdelen van de open vragen is een los antwoord niet voldoende: u dient een berekening en een toelichting te geven, die bovendien goed leesbaar moet zijn opgeschreven.

Meerkeuze vragen

1. Voor twee onafhankelijke gebeurtenissen A en B geldt

$$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(B|A) = \tfrac{1}{2}.$$

Dan is $\mathrm{P}(A \cup B)$ gelijk aan

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{2}{3}$ f) $\frac{3}{4}$

2. Men werpt 4 maal achtereen met een zuivere munt. Wat is de conditionele kans dat er precies 3 maal kruis wordt geworpen, gegeven dat er minstens 2 maal kruis wordt geworpen?

a) $\frac{3}{16}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{4}{11}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{4}$ f) $\frac{13}{16}$

3. Gegeven zijn twee stochasten X en Y met $\mathrm{Var}(X) = 1$, $\mathrm{Var}(Y) = 2$ en $\mathrm{Cov}(X, Y) = -1$. Zij $U = 2X + Y$ en $V = X - Y$. Dan geldt

a) $\mathrm{Var}(U) > \mathrm{Var}(V)$ b) $\mathrm{Var}(U) = \mathrm{Var}(V)$
c) $\mathrm{Var}(U) < \mathrm{Var}(V)$ d) $\mathrm{Var}(U) = \mathrm{Var}(X)$
e) $\mathrm{Var}(V) = 4\mathrm{Var}(Y)$ f) er ontbreken gegevens

4. Op hoeveel manieren kunnen 8 mensen over 2 auto's worden verdeeld die elk 4 zitplaatsen hebben? Het maakt niet uit waar de mensen in de auto's zitten.

a) 16 b) 32 c) 64 d) 35 e) 70 f) 140

5. In een vaas bevinden zich 3 rode en 7 zwarte ballen. Blindelings worden 3 ballen *zonder* teruglegging uit de vaas gehaald. Bereken de kans dat daar minstens 1 zwarte bal bij is.

a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{6}{7}$ e) $\frac{119}{120}$ f) $\frac{719}{720}$

6. Een schaatser doet mee met de elfstedentocht. Voor $i = 1, 2, \ldots, 11$, zij S_i de gebeurtenis dat hij de i^{de} stad bereikt. Stel dat de conditionele kans dat hij de $(i+1)^{\text{ste}}$ stad bereikt gegeven dat hij de i^{de} stad bereikt gelijk is aan $1/i$, d.w.z. $\mathrm{P}(S_{i+1}|S_i) = 1/i$. Merk op dat $\mathrm{P}(S_1) = 1$. De kans dat hij de tocht uitrijdt is gelijk aan

   a) $(\frac{1}{2})^{10}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{1}{11}$
   d) $\frac{1}{10!}$ e) $\frac{1}{11!}$ f) geen van deze antwoorden

7. De discrete stochast U heeft kansmassafunctie

$$\mathrm{P}(U=-1) = 1-\alpha-\beta, \quad \mathrm{P}\left(U=\tfrac{1}{2}\right) = \alpha, \quad \mathrm{P}(U=2) = \beta,$$

   met $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ en $\alpha + \beta \leq 1$. Er geldt $\mathrm{E}[U] = \mathrm{E}[1/U]$ in de volgende gevallen:

   a) voor geen enkele α en β b) precies dan als $\alpha = \frac{1}{3}$ en $\beta = \frac{1}{3}$
   c) precies dan als $\alpha = \beta$ d) precies dan als $\alpha = 0$ en $\beta = 0$
   e) precies dan als $\alpha = 1$ en $\beta = 0$ f) precies dan als $\alpha = 0$ en $\beta = 1$

8. Laat X uniform verdeeld zijn over het interval $[-a, a]$, $a > 0$. Dan geldt dat de correlatiecoëfficient van X en X^2 gelijk is aan

   a) 0 b) 1 c) $-\frac{1}{a}$
   d) $\frac{1}{a}$ e) $-a$ f) a

9. Een discrete stochast Z heet symmetrisch verdeeld wanneer voor alle $z \in \mathbb{R}$ geldt dat $\mathrm{P}(Z=z) = \mathrm{P}(Z=-z)$. Beschouw de discrete stochasten X en Y met simultane kansmassafunctie gegeven door

X / Y	-1	0	1
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$

   De volgende stochasten zijn symmetrisch verdeeld:

   a) X en Y en $X+Y$ wel
   b) X en Y en $X+Y$ niet
   c) X en Y wel, $X+Y$ niet
   d) X en Y niet, $X+Y$ wel
   e) X en $X+Y$ niet, Y wel
   f) Y en $X+Y$ niet, X wel

10. Voor een standaard normaal verdeelde stochast U, definieer u_α voor $0 < \alpha < 1$ door $\mathrm{P}(U > u_\alpha) = \alpha$. Gegeven is een normaal verdeelde stochast X met verwachting -2 en standaardafwijking 9. Als $\mathrm{P}(X > x) = \alpha$, dan is x gelijk aan

   a) $\frac{1}{9}(u_\alpha + 2)$
   b) $9u_\alpha - 2$
   c) $\frac{1}{3}(u_\alpha + 2)$
   d) $3u_\alpha - 2$
   e) u_α
   f) geen van deze uitdrukkingen

11. Laat een Markovketen met toestandruimte $\{1,2,3,4\}$ gegeven zijn door de overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Deze keten

a) is irreducibel en aperiodiek
b) is reducibel en periodiek
c) heeft géén stationaire verdeling
d) heeft precies één terugkerende toestand
e) heeft precies één voorbijgaande toestand
f) geen van deze alternatieven

12. Laat een Markovketen met toestandruimte $\{1,2,3\}$ gegeven zijn door de overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

De gemiddelde terugkeertijd van toestand 1 is gelijk aan

a) $\frac{11}{5}$ b) $\frac{11}{4}$ c) $\frac{11}{2}$
d) 3 e) 2 f) 1

13. Zij $(N(t))_{t\geq 0}$ het Poissonproces met intensiteit $\lambda > 0$. Voor $k = 0,1,2,\dots$ en $t > 0$ is $\mathrm{P}\left(N(t) = k | N(2t) = 2k\right)$ gelijk aan

a) $\frac{1}{k!}e^{-\lambda t}(\lambda t)^k$ b) $\frac{1}{k!}(\lambda t)^k 2^{-k}$ c) $k!(\lambda t)^{-k}$
d) $\binom{2k}{k} 4^{-k}$ e) 2^{-k} f) $\frac{1}{k!}$

14. Zij Z de continue stochast met kansdichtheidsfunctie $f(z) = 2\,z^{-3}\,1_{[1,\infty)}(z)$, $z \in \mathbb{R}$. Bereken de kansdichtheidsfunctie van $W = Z^2$.

a) $w^{-2}\,1_{[1,\infty)}(w)$ b) $\frac{1}{2}\,w^{-2}\,1_{(-\infty,-1]\cup[1,\infty)}(w)$
c) $3w^{-4}\,1_{[1,\infty)}(w)$ d) $\frac{3}{2}w^{-4}\,1_{(-\infty,-1]\cup[1,\infty)}(w)$
e) geen van deze uitdrukkingen f) bestaat niet

15. Zij $(X(t))_{t\geq 0}$ een continue-tijd Markovketen met toestandruimte $\{1,2,3\}$ en overgangsintensiteiten

$$q_{12} = q_{21} = q_{23} = q_{31} = \tfrac{1}{2}, \quad q_{13} = q_{32} = 0.$$

De stationaire verdeling (π_1, π_2, π_3) van deze keten wordt gegeven door

a) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ b) $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ c) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$
d) $(\frac{3}{7}, \frac{3}{7}, \frac{1}{7})$ e) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8})$ f) $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3})$

Open vragen

1. Zij X de continue stochast die uniform verdeeld is over het interval $(0, \frac{1}{10})$, en Y de discrete stochast met $\mathrm{P}\left(Y = \frac{k}{10}\right) = \frac{1}{10}$ voor $k = 0, 1, \ldots, 9$. Zij verder gegeven dat X en Y onafhankelijk zijn.

   Het doel van deze opgave is om de verdeling van $Z = X + Y$ uit te rekenen met behulp van de momentgenererende functies M_X, M_Y, M_Z van X, Y, Z.

   a) Druk $M_Z(t)$ uit in $M_X(t)$ en $M_Y(t)$.
   b) Bereken $M_X(t)$.
   c) Bereken $M_Y(t)$.
   d) Leidt $M_Z(t)$ af uit a)-c). Wat is de verdeling van Z?

2. Jobs arriveren in een computersysteem volgens een Poissonproces met intensiteit 1 per seconde.

   a) Bereken de kans dat er in een gegeven interval van 15 seconden jobs arriveren.
   b) Deel de tijdas op in intervallen van 15 seconden. Bereken de kans dat er tijdens een werkdag van 8 uur minstens één interval is in welke er géén jobs arriveren.
   c) Geef een benadering van de kans dat er tijdens de werkdag ergens een periode van 15 seconden is gedurende welke er géén jobs arriveren. Hint: Kijk naar de tussenaankomsttijden.

3. Jaap heeft een kat en een hond. Op de eerste dag zijn beide buiten. Elke volgende dag laat Jaap de deur kort open staan. Als de kat buiten is, dan gaat hij naar binnen met kans $\frac{3}{4}$. Als de kat binnen is, dan gaat hij naar buiten als de hond de vorige dag binnen was, en gaat hij naar binnen als de hond de vorige dag buiten was. De hond daarentegen gaat altijd daar naar toe waar de kat de vorige dag was. Welke fractie van de tijd is de kat binnen als dit wekenlang zo doorgaat?

   a) Geef de toestandruimte en de overgangsmatrix van de Markovketen die het gedrag van de kat en de hond beschrijft.
   b) Bereken de stationaire verdeling van deze Markovketen en daarmee de gevraagde fractie.

Antwoorden multiple choice:

1 f Omdat A en B onafhankelijk zijn, volgt $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$. Dit geeft $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$.

2 c Zij N het aantal keren dat kruis wordt geworpen. Dan geldt $\mathrm{P}(N = 3 | N \geq 2) = \mathrm{P}(N = 3) / \mathrm{P}(N \geq 2)$. Omdat $\mathrm{P}(N = k) = (\frac{1}{2})^4 \binom{4}{k}$, $k = 1, 2, 3, 4$, volgt dat de gevraagde kans gelijk is aan $4/(6 + 4 + 1) = \frac{4}{11}$.

3 c Bereken

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(U) &= \mathrm{Var}(2X + Y) = 4\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 4\mathrm{Cov}(X, Y) = 4 + 2 - 4 = 2, \\ \mathrm{Var}(V) &= \mathrm{Var}(X - Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) - 2\mathrm{Cov}(X, Y) = 1 + 2 + 2 = 5. \end{aligned}$$

4 f Het aantal is gelijk aan 2 keer het aantal manieren om 4 mensen uit 8 mensen te kiezen, dus $2\binom{8}{4} = 2 \times 70 = 140$.

5 e De gevraagde kans is gelijk aan 1 min de kans dat alle 3 de getrokken ballen rood zijn. Deze laatste gebeurtenis heeft kans $\frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{120}$.

6 d Schrijf

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(S_{11}) &= \mathrm{P}(S_1) \prod_{i=1}^{10} \mathrm{P}(S_{i+1} | \cap_{1 \leq j \leq i} S_j) \\ &= \mathrm{P}(S_1) \prod_{i=1}^{10} \mathrm{P}(S_{i+1} | S_i) = \prod_{i=1}^{10} \tfrac{1}{i} = 1/10!, \end{aligned}$$

waar de tweede gelijkheid gebruikmaakt van het feit dat $i \mapsto S_i$ dalend is.

7 c Bereken

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[U] &= -(1 - \alpha - \beta) + \tfrac{1}{2}\alpha + 2\beta = \tfrac{3}{2}\alpha + 3\beta - 1, \\ \mathrm{E}[1/U] &= -(1 - \alpha - \beta) + 2\alpha + \tfrac{1}{2}\beta = 3\alpha + \tfrac{3}{2}\beta - 1. \end{aligned}$$

Gelijkheid geldt dan en slechts dan als $\frac{3}{2}\alpha + 3\beta = 3\alpha + \frac{3}{2}\beta$, d.w.z. $\alpha = \beta$.

8 a De correlatiecoëfficient is gelijk aan

$$\rho(X, X^2) = \frac{\mathrm{Cov}(X, X^2)}{[\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(X^2)]^{1/2}}.$$

De teller is gelijk aan $\mathrm{E}[X^3] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[X^2]$, en vanwege symmetrie geldt dat $\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[X^3] = 0$.

9 c Optellen van rijen en kolommen geeft $\mathrm{P}(X = -1) = \mathrm{P}(X = 0) = \mathrm{P}(X = 1) = \frac{1}{3}$ en $\mathrm{P}(Y = -1) = \mathrm{P}(Y = 0) = \mathrm{P}(Y = 1) = \frac{1}{3}$ en

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(X + Y = -2) = \tfrac{1}{12},\ \mathrm{P}(X + Y = -1) = \tfrac{1}{4},\ \mathrm{P}(X + Y = 0) = \tfrac{5}{12}, \\ &\mathrm{P}(X + Y = 1) = \tfrac{1}{12},\ \mathrm{P}(X + Y = 2) = \tfrac{1}{6}. \end{aligned}$$

10 b Herschrijf

$$\alpha = \mathrm{P}(X > x) = \mathrm{P}\left(\tfrac{X - \mathrm{E}[X]}{[\mathrm{Var}(X)]^{1/2}} > \tfrac{x - (-2)}{9}\right) = \mathrm{P}\left(U > \tfrac{x+2}{9}\right).$$

Derhalve geldt $u_\alpha = \frac{x+2}{9}$.

11 d Voor $i = 1,2,3,4$ geldt dat de keten vanuit toestand i slechts naar toestanden $\geq i$ kan springen. Derhalve zijn $1,2,3$ voorbijgaand en 4 terugkerend, en heeft de keten periode 1. De stationaire verdeling is $\pi = (0,0,0,1)$.

12 a De stationaire verdeling π is de oplossing van de vergelijking $\pi = \pi P$ met $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. Substitutie van P geeft de relaties $\pi_1 = \frac{5}{4}\pi_2$ en $\pi_2 = 2\pi_3$, waaruit volgt $\pi = (\frac{5}{11}, \frac{4}{11}, \frac{2}{11})$. De gemiddelde terugkeertijd van toestand i is $1/\pi_i$ voor $i = 1,2,3$.

13 d Omdat de incrementen van het Poissonproces over disjuncte tijdintervallen onafhankelijk van elkaar zijn, geldt

$$\mathrm{P}\left(N(t) = k | N(2t) = 2k\right) = \tfrac{\mathrm{P}(N(t)=k, N(2t)=2k)}{\mathrm{P}(N(2t)=2k)} = \frac{[\mathrm{P}\left(N(t) = k\right)]^2}{\mathrm{P}\left(N(2t) = 2k\right)}.$$

De teller is $[\frac{1}{k!}e^{-\lambda t}(\lambda t)^k]^2$, de noemer is $\frac{1}{(2k)!}e^{-2\lambda t}(2\lambda t)^{2k}$.

14 a Voor $u \geq 1$ geldt dat $\mathrm{P}\left(Z > u\right) = u^{-2}$. Derhalve volgt voor $v \geq 1$ dat $\mathrm{P}\left(Z^2 > v\right) = \mathrm{P}\left(Z > v^{1/2}\right) = v^{-1}$. De gevraagde kansdichtheidsfunctie is $-\frac{d}{dv}[v^{-1}] = v^{-2}$.

15 c De Q-matrix, waar de diagonaalelementen worden ingevuld zodanig dat alle rijsommen nul zijn, is gelijk aan

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

De stationaire verdeling π is de oplossing van de vergelijking $\pi Q = 0$ met $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. Substitutie van Q geeft de relaties $\pi_1 = 2\pi_2$ en $\pi_2 = \pi_3$, waaruit volgt dat $\pi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

Antwoorden open vragen:

1 a) $M_Z(t) = \mathrm{E}\left[e^{tZ}\right] = \mathrm{E}\left[e^{t(X+Y)}\right] = \mathrm{E}\left[e^{tX}\right]\mathrm{E}\left[e^{tY}\right] = M_X(t)M_Y(t)$.

b) Bereken

$$M_X(t) = 10\int_0^{\frac{1}{10}} e^{tx}\,dx = \tfrac{10}{t}\left(e^{t/10} - 1\right).$$

c) Bereken

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= \tfrac{1}{10}\sum_{k=0}^{9} e^{tk/10} = \tfrac{1}{10}\,e^t\sum_{k=1}^{10} e^{-tk/10} \\ &= \tfrac{1}{10}\,e^t\,\tfrac{e^{-t/10} - e^{-11t/10}}{1 - e^{-t/10}} = \tfrac{1}{10}\,e^t\,\tfrac{1 - e^{-t}}{e^{t/10} - 1}. \end{aligned}$$

d) Uit a)-c) volgt dat $M_Z(t) = \frac{1}{t}(e^t - 1)$. Derhalve is Z uniform verdeeld over het interval $(0,1)$.

2 a) De gevraagde kans is 1 minus de kans dat er géén jobs arriveren. Deze laatste kans is gelijk aan e^{-15}.

b) Een werkdag van 8 uur bestaat uit $8 \times 60 \times 4 = 1920$ intervallen van 15 seconden. De kans dat er in elk van deze intervallen jobs arriveren is gelijk aan $(1 - e^{-15})^{1920} \approx 1 - e^{-15} \times 1925$. De gevraagde kans is dus ongeveer $e^{-15} \times 1920$.

c) Zij N het aantal jobs dat in een werkdag arriveert. Er is ergens een leeg interval wanneer minstens één van de N interaankomsttijden groter is dan 15 seconden. Deze kans is gelijk aan $1 - \mathrm{E}\left[(1 - e^{-15})^N\right] \approx e^{-15}\mathrm{E}\left[N\right] = e^{-15} \times 1920 \times 15$.

3 a) Het gedrag van de kat en de hond kan beschreven worden m.b.v. een Markovketen met toestandruimte $\{1, 2, 3, 4\}$, met $1 =$ (kat binnen, hond binnen), $2 =$ (kat binnen, hond buiten), $3 =$ (kat buiten, hond binnen), $4 =$ (kat buiten, hond buiten). De overgangsmatrix is

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

b) De stationaire verdeling is de oplossing van de vergelijking $\pi = \pi P$ met $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$. Substitutie van P geeft de relaties $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$ en $\pi_3 = 3\pi_4$, waaruit volgt dat $\pi = (\frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10})$. De gevraagde fractie is $\pi_1 + \pi_2 = \frac{3}{5}$.