Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden

Niels Bohrweg 1
2333 CA Leiden

Tentamen Inleiding Kansrekening
23 juni 2011, 10.00–13.00 uur

Bij dit examen is het gebruik van een (evt. grafische) rekenmachine toegestaan. Ook toegestaan is een formuleblad, dat wordt uitgedeeld en na afloop weer moet worden ingeleverd!

Normering: De 15 meerkeuzevragen en de 4 open vragen (met samen 7 onderdelen) tellen elk voor ongeveer de helft van het cijfer. Voor elke meerkeuzevraag krijgt u 2 punten, voor elk onderdeel van een open vraag 4 punten. Totaal zijn er dus 58 punten te behalen. U krijgt 7 punten kado. Cijfer: aantal punten gedeeld door 6,5.

Meerkeuze vragen

1. Als $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(C) = 0.8$, dan geldt

   a) $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) \geq 0.8$ b) $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) \geq 0.6$
   c) $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) \geq 0.4$ d) $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) < 0.8$
   e) $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) < 0.6$ f) $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) < 0.4$

2. Laten A en B onafhankelijke gebeurtenissen zijn met kansen $\mathrm{P}(A) = p$, $\mathrm{P}(B) = q$, $p, q \in (0, 1)$. Wat is de kans dat precies één gebeurtenis A of B optreedt?

   a) $p + q$ b) $2pq$ c) $p + q - 2pq$
   d) $(p + q)^2$ e) pq f) $p(1 - p) + q(1 - q)$

3. Op een plank staan 15 boeken, waarvan er 5 over wiskunde gaan. Een student trekt willekeurig 3 boeken (zonder teruglegging). Wat is de kans dat tenminste één boek over wiskunde gaat?

   a) $\frac{1}{15}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{67}{91}$ d) $\frac{24}{45}$ e) $\frac{8}{75}$ f) $\frac{221}{455}$

4. In een kaartspel krijgt een speler 13 kaarten uit een goed geschud pak van 52 kaarten. De kans dat de speler precies één Aas heeft, gegeven dat hij 2 Heren heeft gekregen ligt in het interval

   a) $[0, 0.1)$ b) $[0.1, 0.2)$ c) $[0.2, 0.3)$
   d) $[0.3, 0.4)$ e) $[0.4, 0.5)$ f) $[0.5, 0.6)$

5. Bij een onzuivere dobbelsteen komt k met een kans ck naar boven $(1 \leq k \leq 6)$. Bepaal de constante c, en bereken het verwachte aantal ogen. Dit is

   a) $\frac{75}{21}$ b) $\frac{91}{21}$ c) $\frac{31}{7}$ d) $\frac{24}{21}$ e) $\frac{41}{7}$ f) $\frac{17}{3}$

6. Een spel met een eerlijke dobbelsteen. Ik gooi een dobbelsteen. Bij 6 win ik onmiddellijk (speelduur 0 minuten), bij elke andere uitkomst k, ($k = 1, 2, 3, 4, 5$), moet ik k minuten wachten en dan opnieuw proberen. Wat is de te verwachte speelduur in minuten?

   a) 6 b) 9.5 c) 11.5 d) 15 e) 21 f) 30

7. Laten X en Y onafhankelijke stochastische variabelen zijn, beide exponentieel verdeeld met parameter λ. Zij $Z = X + Y$. Dan geldt voor de verdelingsfunctie F van Z dat

   a) $F(z) = 1 - e^{-2\lambda z}$ b) $F(z) = 1 - e^{-\lambda z/2}$ c) $F(z) = (1 - e^{-\lambda z})^2$
   d) $F(z) = \lambda^2 z e^{\lambda z}$ e) $F(z) = 1 - z e^{-\lambda z}$ f) $F(z) = 1 - e^{-\lambda z}(1 + \lambda z)$

8. Gegeven zijn twee stochastische variabelen U en V met standaardafwijkingen 3 en 4. De correlatiecoefficient $\rho(U, V) = -0.5$. De variantie van $Z = U - V$ is

   a) 5 b) 7 c) 13 d) 25 e) 37 f) 49

9. Voor een standaard normaal verdeelde stochastische variabele U zijn de getallen u_α, $0 < \alpha < 1$, gedefinieerd door $\mathrm{P}(U > u_\alpha) = \alpha$. Zij V een normaal verdeelde stochast met verwachting 2 en variantie 144. Als $\mathrm{P}(V > v) = \alpha$, dan is v gelijk aan

   a) $\frac{1}{12}(u_\alpha + 2)$ b) $12u_\alpha - 2$ c) $12u_\alpha + 2$
   d) $6u_\alpha + 1$ e) $\sqrt{18}(u_\alpha + 2)$ f) $\sqrt{18}(u_\alpha - 2)$

10. Gegeven zijn onafhankelijke stochasten U en V, beide geometrisch verdeeld met parameter p, voor een p met $0 < p < 1$. Dus

$$\mathrm{P}(U = k) = \mathrm{P}(V = k) = p(1-p)^{k-1}, \text{ voor } k = 1, 2, 3, \ldots$$

   Bereken $\mathrm{P}(U = V)$. Deze is gelijk aan

   a) p b) $\frac{p}{1-p}$ c) $\frac{p}{2-p}$ d) p^2 e) $\frac{p^2}{1-p^2}$ f) $\frac{1+p^2}{1-p^2}$

11. De momentgenererende functie $M_X(t)$ van een stochast X met kansdichtheid

$$f_X(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

   is voor $t < 1$ gelijk aan

   a) $(t-1)^2$ b) $t^2 - 1$ c) t
   d) $(t-1)^{-2}$ e) $t^{-2} - 1$ f) t^{-1}

12. Bepaal de ontbrekende elementen in een Markov overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & * \\ 0.25 & * & 0.25 \\ * & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$$

en bereken de stationaire verdeling.

a) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ b) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ c) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ d) $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ e) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ f) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$

13. Een continue tijd Markovketen met toestandsruimte S en overgangskansen $p_{ij}(s,t)$ wordt homogeen genoemd als:

a) $p_{ij}(s,t) = p_{0,j-i}(s,t)$ voor alle $i, j \in S$ en $s \leq t$
b) $p_{ij}(s,t) = p_{ji}(s,t)$ voor alle $i, j \in S$ en $s \leq t$
c) $p_{ij}(s,t) = p_{ij}(s+r, t+r)$ voor alle $i, j \in S$ en $s \leq t$ en $r \geq 0$
d) $p_{ij}(s,t)$ is onafhankelijk van s en t
e) $p_{ij}(s,t) = p_{ik}(s,u)p_{kj}(u,t)$ voor alle $i, j, k \in S$ en $s \leq u \leq t$
f) $p_{ij}(s,t) = p_{ij}(t-s, t+s)$ voor alle $i, j, k \in S$ en $s \leq t$

14. We hebben een vertakkingsprocess $(Z_n)_{n=0}^{\infty}$ met $Z_0 = 1$, en $\mathrm{P}(Z_1 = 0) = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(Z_1 = 2) = \frac{3}{4}$. Wat is de uitsterfkans van dit proces?

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{5}{6}$ f) 1

15. Gegeven is een Markovketen met toestandsruimte $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ en overgangsmatrix

$$\begin{pmatrix} p & 1-p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 1-p \\ 1-p & 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

met $p \in (0,1)$. Beschouw de volgende drie beweringen m.b.t. de keten:

I) Toestanden 1 en 3 communiceren met elkaar
II) De periode van toestand 1 is 5
III) De keten heeft meer dan één stationaire verdeling

Deze uitspraken zijn juist (J) of onjuist (O) in de volgorde:

a) O,J,J b) J,O,J c) J,J,O d) J,O,O e) O,J,O f) O,O,J

Open vragen

1. Als de kans dat iemand 180 gooit gegeven dat hij Barney heet 0,4 is, en 0,001 als hij niet Barney heet, en we weten dat zo'n 2 op de 1000 personen Barney heten, wat is dan de kans dat iemand Barney heet als we hem 180 zien gooien?

2. Laten (X, Y) continue stochasten zijn met een gezamelijke dichtheid

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} x^{-1}, & 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

   (a) Bereken $\mathrm{E}[X]$ en $\mathrm{E}[Y]$.

   (b) Bereken de voorwaardelijke kansdichtheid $f_{Y|X}(y|x)$ en de voorwaardelijke verwachting $\mathrm{E}[Y|X = x]$ voor $x \in (0, 1)$.

3. Laat een continue-tijd Markov keten $\{X_t\}$ met toestandsruimte $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ een zogenaamd *puur* geboorte-sterfte proces zijn, dat wil zeggen de sterfte-intensiteiten $\mu_n = 0$ voor alle n, en de geboorte-intensiteiten $\lambda_n = n\lambda$ voor $n = 1, 2, \dots$. Verder start het proces met één deeltje: $X(0) = 1$.

   (a) Toon aan dat $\mathrm{P}(X(t) = 1) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ voor $t > 0$.

   (b) Bewijs dat voor $n \geq 1$

$$p_n(t) = \mathrm{P}(X(t) = n) = \mathrm{e}^{-\lambda t}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t})^{n-1}.$$

   Aanwijzing: Het is voldoende te bewijzen dat de $(p_n(t))$ voldoen aan de achterwaartse Kolmogorov vergelijkingen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_t = Q P_t, \quad t > 0.$$

   (c) Bereken $\mathrm{E}[X(t)]$.

4. Bewijs dat voor $x \geq 0$ en $n \to +\infty$

$$\sum_{k:\, |k - \frac{n}{2}| \leq \frac{1}{2}\sqrt{n}x} 2^{-n} \binom{n}{k} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2} du.$$

   Aanwijzing: Kies geschikte stochasten, en pas daarmee de Centrale Limietstelling toe.

Antwoorden multiple choice:

1 c Met behulp van

$$1 - \mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A^c \cup B^c \cup C^c) \leq \mathrm{P}(A^c) + \mathrm{P}(B^c) + \mathrm{P}(C^c) = 0.6.$$

Alternatief: (Bonferroni ongelijkheid)

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cup B) \geq \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 1,$$

dus

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \cap B \cap C) &\geq \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(C) - 1 \\ &\geq \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - 2 = 3 \cdot 0.8 - 2 = 0.4\end{aligned}$$

2 c Laat $C = \{$ precies één gebeurtenis A of B komt uit $\}$. Dan

$$C = \Big(A \cap B^c\Big) \cup \Big(A^c \cap B\Big),$$

en

$$\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(A \cap B^c) + \mathrm{P}(A^c \cap B) = p(1-q) + (1-p)q = p + q - 2pq$$

3 c Zij $A = \{$tenminste één wiskundig boek$\} \Rightarrow A^c = \{$geen enkel wiskundig boek$\}$, en

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A^c) = 1 - \frac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}.$$

Alternatief: "getrapt" experiment: $\mathrm{P}(A^c) = \frac{10}{15}\frac{9}{14}\frac{8}{13} = \frac{24}{91}$.

4 e

$$\mathrm{P}(\text{ 2 Heren}) = \mathrm{P}(HH) = \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{11}}{\binom{52}{13}}$$

$$\mathrm{P}(\text{1 Aas, 2 Heren}) = \mathrm{P}(A \cap HH) = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{44}{10}}{\binom{52}{13}}$$

$$\mathrm{P}(A|HH) = \frac{\mathrm{P}(AHH)}{\mathrm{P}(HH)} = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{44}{10}}{\binom{4}{2}\binom{48}{11}} = \frac{7 \cdot 11 \cdot 37}{3 \cdot 46 \cdot 47} \approx 0.44$$

5 b

$$1 = \sum_{k=1}^{6} \mathrm{P}(W = k) = \sum_{k=1}^{6} ck = 21c \quad \Rightarrow c = \frac{1}{21}.$$

$$\mathrm{E}[W] = \sum_{k=1}^{6} k\mathrm{P}(W = k) = c\sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{91}{21}.$$

6 d Notatie: T speelduur, W is de uitkomst van dobbelsteen gooi ($W = 1,2,3,4,5,6$). Dan

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[T] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[T|W]] &= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}\mathrm{E}[T|W=k] \\
&= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{5}(\mathrm{E}[T]+k) \qquad (\textbf{NB: } \mathrm{E}[T|W=6]=0.) \\
&= \frac{5}{6}\mathrm{E}[T] + \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{5}k = \frac{5}{6}\mathrm{E}[T] + \frac{15}{6} \qquad \Rightarrow \mathrm{E}[T] = 15.
\end{aligned}$$

7 f Zij f_Z de kansdichtheidsfunctie van Z. Dan is $f(z) = 0$ als $z < 0$, en

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy = \int_0^z \lambda e^{-\lambda(z-y)}\lambda e^{-\lambda y}dy = \lambda^2 z e^{-\lambda z}, \; z > 0,$$

Dus

$$F_Z(z) = 1 - e^{-\lambda z}(1+\lambda z), \quad z > 0.$$

8 e

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(U-V) &= \mathrm{Var}(U) + \mathrm{Var}(V) - 2\mathrm{Cov}(U,V) \\
&= \mathrm{Var}(U) + \mathrm{Var}(V) - 2\rho(U,V)\sqrt{\mathrm{Var}(U)\cdot\mathrm{Var}(V)} \\
&= 3^2 + 4^2 + 3\cdot 4 = 37.
\end{aligned}$$

9 c

$$\alpha = \mathrm{P}(V > v) = \mathrm{P}\left(\frac{V-2}{12} > \frac{v-2}{12}\right) = \mathrm{P}\left(U > \frac{v-2}{12}\right) \Rightarrow u_\alpha = \frac{v-2}{12} \Rightarrow v = 12u_\alpha +$$

10 c

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(U=V) &= \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}(U=k, V=k) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}(U=k)\,\mathrm{P}(V=k) = \sum_{k=1}^{\infty}p^2(1-p)^{2(k-1)} \\
&= p^2\sum_{k=1}^{\infty}\left[(1-p)^2\right]^{k-1} = \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}.
\end{aligned}$$

11 d

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}f_X(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{(t-1)x}x\,dx = \frac{[(t-1)x-1]e^{(t-1)x}}{(t-1)^2}\Big|_0^\infty = \frac{1}{(t-1)^2}$$

12 a Rij sommen zijn gelijk aan 1, dus

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi P = \pi \Rightarrow \begin{cases} 0.5\pi_1 + 0.25\pi_2 + 0.25\pi_3 & = \pi_1 \\ 0.25\pi_1 + 0.5\pi_2 + 0.25\pi_3 & = \pi_2 \\ 0.25\pi_1 + 0.25\pi_2 + 0.5\pi_3 & = \pi_3 \end{cases} \Rightarrow \pi = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$$

13 c

14 c Want $G(s) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}s^2 = s \Leftrightarrow 3s^2 - 4s + 1 = 0 \Leftrightarrow (3s-1)(s-1) = 0$.

15 d J,O,O

Antwoorden open vragen:

1 Bayes formule geeft: $(0.4 \cdot 0.002)/(0.4 \cdot 0.002 + 0.001 \cdot 0.998) \approx 0.445$.

2a

$$\mathrm{E}\,[X] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{XY}(x,y)dydx = \int_0^1\int_0^x x \cdot \frac{1}{x}\,dy = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2},$$

$$\mathrm{E}\,[Y] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{XY}(x,y)dydx = \int_0^1\int_0^x y \cdot \frac{1}{x}\,dydx = \int_0^1 \frac{1}{x}\big(\frac{1}{2}x^2\big)\,dx = \frac{1}{4}.$$

2b De marginale kansdichtheid van X: voor $x \in (0,1)$,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_0^x \frac{1}{x}\,dy = 1,$$

en $f_X(x) = 0$ als $x \leq 0$ of $x \geq 1$. Stochast X is dus uniform verdeeld op $(0,1)$. De voorwaardelijke kansdichtheid van Y gegeven $X = x$ is

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{x}$$

voor $y \in (0,x)$ en 0 anders. Dus

$$\mathrm{E}\,[Y|X=x] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x)\,dy = \int_0^x \frac{y}{x}dx = \frac{x}{2}.$$

3a Als T_1 de verblijftijd in toestand 1 is, dan is $\mathrm{P}\,(X(t) = 1) = \mathrm{P}\,(T_1 > t)$, en omdat T_1 exponentieel verdeeld is met parameter λ is deze kans $\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

3b Voor $n = 1$ geldt het (onderdeel a)). Achterwaartse Kolmogorov vergelijkingen voor $n \geq 1$:

$$p'_{n+1}(t) = n\lambda\, p_n(t) - (n+1)\lambda\, p_{n+1}(t).$$

Invullen van $p_n(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t})^{n-1}$ en idem p_{n+1} en p'_{n+1}: klopt!.

3c Het snelst: merk op dat $X(t)$ geometrisch verdeeld is met parameter $p = \mathrm{e}^{-\lambda t}$. De verwachting is dus $\mathrm{E}\,[X(t)] = 1/p = \mathrm{e}^{\lambda t}$.

4 Stel $X_1, X_2, \ldots$ zijn onafhankelijke $\mathsf{Ber}(\frac{1}{2})$-stochasten, dan heeft $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ $\mathsf{Bin}(n, \frac{1}{2})$ verdeling, en (Centrale Limiet Stelling)

$$2^{-n} \sum_{k:|k-\frac{n}{2}|\leq\frac{1}{2}\sqrt{n}x} \binom{n}{k} = \mathrm{P}\left(\frac{|S_n - \frac{1}{2}n|}{\frac{1}{2}\sqrt{n}} \leq x\right) \to \Phi(x) - \Phi(-x) = \int_{-x}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}du.$$