Mathematisch Instituut Niels Bohrweg 1
Universiteit Leiden 2333 CA Leiden Delft

# Tentamen Inleiding Kansrekening
# 11 augustus 2011, 09.00–12.00 uur

Bij dit examen is het gebruik van een (evt. grafische) rekenmachine toegestaan. Ook toegestaan is een formuleblad, dat wordt uitgedeeld en na afloop weer moet worden ingeleverd!
*Normering:* Er zijn 15 meerkeuzevragen en 4 open vragen. Voor elke meerkeuzevraag krijgt u 2 punten, voor elke open vraag 5 punten. Totaal zijn er dus 50 punten te behalen. U krijgt 5 punten kado. Cijfer: aantal punten gedeeld door 5,5.

## Meerkeuze vragen

1. $A_1, A_2$ en $A_3$ zijn drie onafhankelijke gebeurtenissen met
$$\mathrm{P}(A_1) = \frac{1}{2},\ \mathrm{P}(A_2) = \frac{1}{6},\ \mathrm{P}(A_3) = \frac{1}{8}.$$
Wat is $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$?

   a) $\frac{76}{96}$ b) $\frac{61}{96}$ c) $\frac{60}{96}$ d) $\frac{93}{96}$ e) $\frac{72}{96}$ f) $\frac{84}{96}$

2. Een codewoord (in morsecode) bestaat uit tenminste één en ten hoogste vijf karakters. Voor de karakters kan worden gekozen uit twee symbolen (punt of streep). Hoeveel verschillende codewoorden kunnen worden gevormd?

   a) 10 b) 20 c) 24 d) 28 e) 32 f) 62

3. Twee studenten lossen problemen op, en leggen de antwoorden op een tafel. Student $A$ lost twee keer zo veel problemen op als student $B$. De kans dat student $A$ een juiste antwoord vind is 0.6, de kans dat student $B$ een juiste antwoord vind is 0.84. De docent neemt een willekeurige oplossing van de tafel. Gegeven dat het antwoord juist is, wat is (bij benadering) de kans dat dit antwoord door student $A$ gevonden was?

   a) 0.59 b) 0.68 c) 0.76 d) 0.33 e) 0.66 f) 0.80

4. Punt $C$ is uniform gekozen in het interval $[A, B]$ met lengte $L$. Wat is de kans dat het kleinste interval $[A, C]$ of $[C, B]$ een lengte $\geq L/3$ heeft?

   a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{9}$ d) $\frac{L}{3}$ e) $\frac{L}{4}$ f) $\frac{L}{9}$

5. Een rij "random"getallen bestaat voor $\frac{1}{3}$ uit nullen en voor $\frac{2}{3}$ uit éénen (m.a.w. dit is een rij van onafhankelijke, gelijkverdeelde stochasten $X_1, X_2, \ldots$ met $\mathrm{P}(X_1 = 0) = 1 - \mathrm{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{3}$). Zij $N$ de eerste index waarvoor $X_1 + \cdots + X_N = 10$. Bereken $\mathrm{E}[N]$.

   a) $\frac{20}{3}$ b) 10 c) $12\frac{2}{3}$ d) 15 e) 20 f) 30

6. Laten $X$ en $Y$ onafhankelijke stochasten zijn met een normale $\mathcal{N}(1,2)$ verdeling. De verdeling van $Z = 3X + 4Y + 5$ is

   a) $\mathcal{N}(12,14)$ b) $\mathcal{N}(5,14)$ c) $\mathcal{N}(12,50)$
   d) $\mathcal{N}(5,50)$ e) $\mathcal{N}(12,100)$ f) anders

7. De continue stochast $X$ is uniform verdeeld op $(0,1)$ ($X \sim U(0,1)$). De verdeling van $Z = -\frac{1}{\lambda}\log X$, $\lambda > 0$, is

   a) uniform op $[0,\infty)$ b) uniform op $[0,\frac{1}{\lambda})$ c) Gamma($\lambda$)
   d) Exp($\lambda$) e) Exp($-\lambda$) f) Exp($\frac{1}{\lambda}$)

8. Stochasten $X, Y$ hebben gezamelijke dichtheid

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda y}, & 0 \le x \le y,\ \lambda > 0, \\ 0, & \text{anders} \end{cases}$$

   De marginale dichtheid $f_X(x)$ is

   a) uniform op $[0,y]$ b) uniform op $[0,\frac{1}{\lambda})$ c) Exp(1)
   d) Exp($\lambda$) e) Exp($-\lambda$) f) Exp($\frac{1}{\lambda}$)

9. Stochast $X$ heeft een momentgenererende functie $M_X(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(e^t + e^{-t})$. Bereken $\mathrm{E}\left[X^2\right]$.

   a) 0 b) 0.25 c) 0.5 d) 0.75 e) 1 f) 2

10. Men kiest willekeurig $n = 100$ punten in het interval $(-1,1)$. Gebruik de ongelijkheid van Chebychev om de kans dat het gemiddelde van deze punten meer dan 0.1 van het punt nul is verwijderd af te schatten (met een nauwkeurigheid van 1 decimaal; kies de kleinste schatting van boven).

    a) 0.1 b) 0.2 c) 0.3 d) 0.4 e) 0.5 f) 0.6

11. Men kiest willekeurig $n = 100$ punten in het interval $(-1,1)$. Gebruik de normale benadering om de kans dat het gemiddelde van deze punten

meer dan 0.1 van het punt nul is verwijderd te schatten. Gebruik één of meerdere waardes van de standaard normale verdelingsfunctie:

$$\begin{array}{lll} \Phi(0) = 0.5, & \Phi(1) = 0.8413, & \Phi(\sqrt{2}) = 0.9207, \\ \Phi(\sqrt{3}) = 0.9582, & \Phi(2) = 0.9772, & \Phi(3) = 0.9987 \end{array}$$

a) 0.0745 b) 0.0836 c) 0.0026 d) 0.1586 e) 0.0418 f) 0.0013

12. Stochast $X$ is uniform verdeeld op $[0, 2]$. Wat is de kans $\mathrm{P}\left(X + X^2 \leq 0.75\right)$?

    a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{5}$

13. Een organisatie bestaat uit een groot aantal werknemers. Elke werknemer is ingeschaald volgens één van drie mogelijke salarisklassen en verandert jaarlijks van klasse volgens de volgende Markov matrix:

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$$

    Geef voor elk van de drie salarisklassen het percentage werknemers dat (na een groot aantal jaren) in de klasse verkeert.

    a) $\approx (24\%, 35\%, 41\%)$ b) $\approx (35\%, 24\%, 41\%)$ c) $\approx (41\%, 24\%, 35\%)$
    d) $\approx (24\%, 41\%, 35\%)$ e) $\approx (35\%, 41\%, 24\%)$ f) $\approx (41\%, 35\%, 24\%)$

14. Stochasten $X$ en $Y$ hebben gezamenlijke dichtheid

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-x(y+1)}, & x, y \geq 0, \\ 0, & \text{anders} \end{cases}$$

    De conditionele verwachting $\mathrm{E}\left[Y|X = x\right]$ is

    a) $\frac{1}{8}$ b) $2x$ c) $x^2$ d) $1/x$ e) $\frac{1}{2}$ f) $\mathrm{e}^{-x}$

15. Nieuwe gebruikers registreren zich op een website volgens Poisson proces met intensiteit $\lambda = 1$. Wat is (bij benadering) de kans dat er tussen de tiende en de elfde registratie drie dagen of meer verloopt?

    a) 0.01 b) 0.02 c) 0.05 d) 0.10 e) 0.15 f) 0.20

## Open vragen

1. Gegeven is $\mathrm{P}(A|E) \geq \mathrm{P}(B|E)$ en $\mathrm{P}(A|E^c) \geq \mathrm{P}(B|E^c)$. Bewijs dat $\mathrm{P}(A) \geq \mathrm{P}(B)$.

2. Uw koelkast kan in twee toestanden verkeren, "aan" en "uit". De gemiddelde lengte van een "aan" periode is 15 minuten, die van een "uit" periode 2 uur. Wanneer de koelkast "aan" is verbruikt hij 400 Watt stroom. Aangenomen wordt dat het gaat om een continue tijd Markov keten. Schrijf de generator $G$ (druk uw eenheden uit in uren). Bereken de evenwichtsverdeling $\pi$ en de kosten van de koelkast per dag als de kilowattuurprijs 30 cent bedraagt.

3. Een bacteriecultuur wordt bestraald met radioactieve straling en heeft daardoor het volgende groeipatroon. Iedere seconde is er voor elke bacterie een kans 0.1 om te sterven, een kans 0.4 om te overleven zonder zich te vermenigvuldigen, en een kans 0.5 om te overleven en één nieuwe bacterie te produceren. Wanneer men begint met 500 culturen, elk met één bacterie, en men bestraalt deze culturen gedurende 24 uur, wat is dan het gemiddelde aantal overlevende culturen?

4. Bewijs dat voor $x \geq 0$ en $n \to +\infty$

$$\mathrm{e}^{-n} \sum_{k:|k-n| \leq x\sqrt{n}} \frac{n^k}{k!} \to \int_{-x}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2} du.$$

*Aanwijzing: Kies geschikte stochasten, en pas daarmee de Centrale Limietstelling toe.*

**Antwoorden multiple choice:**

**1 B**

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) \\ &\quad - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) \\ &\quad + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} \\ &= \frac{61}{96} = 0.635416666....\end{aligned}$$

**2 F**

$$2 + 4 + ... + 32 = 62$$

**3 A**

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(Juist\right) &= \mathrm{P}\left(Juist|A\right)\mathrm{P}\left(A\right) + \mathrm{P}\left(Juist|B\right)\mathrm{P}\left(B\right) \\ &= 0.6 \times \frac{2}{3} + 0.84 \times \frac{1}{3} = 0.68\end{aligned}$$

$$\mathrm{P}\left(A|Juist\right) = \frac{\mathrm{P}\left(Juist|A\right)\mathrm{P}\left(A\right)}{\mathrm{P}\left(Juist\right)} = \frac{0.6 \times \frac{2}{3}}{0.68} = \frac{0.4}{0.68} \approx 0.59$$

**4 A**

$$\mathrm{P}\left(\min\{C - A, B - C\} \geq \frac{L}{3}\right) = \mathrm{P}\left(C \in [A + L/3, B - L/3]\right) = \int\limits_{A+L/3}^{B-L/3} \frac{1}{L} dx = \frac{1}{3}.$$

**5 D**

$$T = \sum_{i=1}^{N} X_i = 10 \Rightarrow 10 = \mathrm{E}\left[T\right] = \mathrm{E}\left[N\right]\mathrm{E}\left[X_1\right] = \frac{2}{3}\mathrm{E}\left[N\right] \;\Rightarrow\; \mathrm{E}\left[N\right] = 15$$

Alternatief: de tijd tot de eerste 1 is geometrisch verdeeld met parameter 2/3. De verwachte tijd tot de 10de 1 is dus gelijk aan $10 \times 3/2 = 15$.

**6 C**

$$\mathrm{E}\left[Z\right] = 3\mathrm{E}\left[X\right] + 4\mathrm{E}\left[Y\right] + 5 = 12, \;\mathrm{Var}\left(Z\right) = 3^2\mathrm{Var}\left(X\right) + 4^2\mathrm{Var}\left(Y\right) = 50$$

**7 D**

$$\mathrm{P}\left(Z < t\right) = \mathrm{P}\left(X > \mathrm{e}^{-\lambda t}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} \;\Rightarrow\; Z \sim \mathsf{Exp}(\lambda).$$

**8 D**

$$f_X(x) = \int_x^\infty \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda y} dy = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

**9 C**

$$\mathrm{E}\left[X^2\right] = \frac{d^2}{dt^2} M_X(t)\,|_{t=0} = \frac{1}{2}.$$

**10 D**

$$S = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i,\ X_i \sim U(-1,1)\ \left(\Rightarrow \mathrm{E}\left[X_i\right] = 0,\ \mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{3}\right).$$

Dus

$$\mathrm{E}\left[S\right] = 0,\ \mathrm{Var}(S) = \frac{1}{100}\mathrm{Var}(X).$$

en (Chebyshev ongelijkheid)

$$\mathrm{P}\left(|S| > 0.1\right) \leq \frac{1}{(0.1)^2}\mathrm{Var}(S) = \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{3}.$$

**11 B**

$$S = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i,\ X_i \sim U(-1,1)\ \left(\Rightarrow \mathrm{E}\left[X_i\right] = 0,\ \mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{3}\right).$$

Dus

$$\mathrm{E}\left[S\right] = 0,\ \mathrm{Var}(S) = \frac{1}{100}\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{300}.$$

en (normale benadering, Centrale Limietstelling)

$$\mathrm{P}\left(|S| > 0.1\right) = \mathrm{P}\left(\left|\frac{S}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}\right| > \frac{0.1}{\sqrt{1/300}}\right) \approx \mathrm{P}\left(|Z| > \sqrt{3}\right),\ Z \sim \mathcal{N}(0,1),$$

en

$$\mathrm{P}\left(|Z| > \sqrt{3}\right) = 2\mathrm{P}\left(Z > \sqrt{3}\right) = 2\cdot(1 - \Phi(\sqrt{3})) = 0.0836.$$

**12 C** Oplossen van de kwadratische vergelijking geeft

$$\mathrm{P}\left(X + X^2 \leq \frac{3}{4}\right) = \mathrm{P}\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

**13 E**

$$\pi P = \pi \Rightarrow \pi = \left(\frac{6}{17}, \frac{7}{17}, \frac{4}{17}\right) \approx (35\%, 41\%, 24\%)$$

**14 D**

$$f_X(x) = \int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x(y+1)}dy = \mathrm{e}^{-x},\ 0 \le x < \infty.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[Y|X=x\right] &= \int_0^\infty y f_{Y|X}(y|x)dy = \int_0^\infty y\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}dy = \int_0^\infty xy\mathrm{e}^{-xy}dy \\ &= \frac{1}{x}\int_0^\infty t\mathrm{e}^{-t}dt = \frac{1}{x}\left[-(1+t)\mathrm{e}^{-t}\right]\Big|_0^\infty = \frac{1}{x}\end{aligned}$$

**15 C** Voor het Poisson proces $\{N(t)\}$ met intensiteit $\lambda$, zijn de tussenaankomsttijden

$$T_k = S_{k+1} - S_k, \quad S_k = \inf\{t \ge 0 : N(t) = k\},\ k = 0, 1, \ldots,$$

exponentieel verdeeld met parameter $\lambda$:

$$\mathrm{P}\left(T_k \ge t\right) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Dus $\mathrm{P}\left(T_k \ge 3\right) = \mathrm{e}^{-3} \approx 0.05$.

**Antwoorden open vragen:**

**1**

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(A|E\right) \ge \mathrm{P}\left(B|E\right) &\ \Rightarrow\ \mathrm{P}\left(A\cap E\right) \ge \mathrm{P}\left(B \cap E\right) \\ \mathrm{P}\left(A|E^c\right) \ge \mathrm{P}\left(B|E^c\right) &\ \Rightarrow\ \mathrm{P}\left(A\cap E^c\right) \ge \mathrm{P}\left(B \cap E^c\right)\end{aligned}$$

Dus

$$\mathrm{P}\left(A\right) = \mathrm{P}\left(A\cap E\right) + \mathrm{P}\left(A\cap E^c\right) \ge \mathrm{P}\left(B\cap E\right) + \mathrm{P}\left(B\cap E^c\right) = \mathrm{P}\left(B\right).$$

In een ruk opgeschreven:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(A\right) &= \mathrm{P}\left(A\cap E\right) + \mathrm{P}\left(A\cap E^c\right) = \mathrm{P}\left(A|E\right)\mathrm{P}\left(E\right) + \mathrm{P}\left(A|E^c\right)\mathrm{P}\left(E^c\right) \\ &\ge \mathrm{P}\left(B|E\right)\mathrm{P}\left(E\right) + \mathrm{P}\left(B|E^c\right)\mathrm{P}\left(E^c\right) = \mathrm{P}\left(B\cap E\right) + \mathrm{P}\left(B\cap E^c\right) \\ &= \mathrm{P}\left(B\right)\end{aligned}$$

**2**

$$G = \begin{pmatrix}\lambda & -\lambda \\ -\mu & \mu\end{pmatrix}, \quad \lambda = 4,\ \mu = \frac{1}{2}.$$

$\pi G = 0$: $\lambda\pi_0 - \mu\pi_1 = 0$, en $\pi_0 + \pi_1 = 1$.

$$\pi_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{1}{9}, \quad \pi_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} = \frac{8}{9}.$$

Kosten zijn $24 \cdot \pi_0 \cdot 0.4 \cdot 30 = 32$ cent per dag.

**3** Elke cultuur gedraagt zich als vertakking proces met

$$p_0 = \mathrm{P}(Z=0) = 0.1,\ p_1 = \mathrm{P}(Z=1) = 0.4,\ p_2 = \mathrm{P}(Z=2) = 0.5.$$

De kans op uitsterven $\pi_0$ is de kleinste niet-negatieve oplossing van de vergelijking

$$s = 0.1 + 0.4s + 0.5s^2 \Rightarrow 5s^2 - 6s + 1 = 0 \Rightarrow s = \frac{1}{5}, 1,$$

dus $\pi_0 = 0.2$. Er geldt ook

$$\pi_0 = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(X_n = 0).$$

De vraag gaat over $n = 86400$ (aantal seconden in 24 uur), dus $n$ is groot, en we kunnen aannemen dat

$$\mathrm{P}(X_{86400} = 0) \approx \pi_0 = 0.2, \quad \mathrm{P}(X_n > 0) \approx 0.8.$$

Dus uit 500 culturen zouden er gemiddeld 80% dus 400 overleven.

**4** Stel $X_1, X_2, \ldots$ zijn onafhankelijke $\mathsf{Pois}(1)$-stochasten, dan heeft $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ een $\mathsf{Pois}(n)$ verdeling, en (Centrale Limiet Stelling)

$$\mathrm{e}^{-n} \sum_{k:|k-n|\le x\sqrt{n}} \frac{n^k}{k!} = \mathrm{P}\left(\frac{|S_n - n|}{\sqrt{n}} \le x\right) \to \Phi(x) - \Phi(-x) = \int_{-x}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2} du.$$