Tentamen Inleiding Kansrekening, 14 juni 2012, 14:00-17:00

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk en overzichtelijk te worden opgeschreven. Dit tentamen bestaat uit 2 delen en 23 vragen. Elke vraag (behalve de laatste) is 4 punten waard, en de laatste is 2 punten waard. Totaal zijn er dus 90 punten te behalen. U krijgt 10 punten kado.

Deel 1 (15 vragen)

I. Een vaas bevat b blauwe en r rode ballen, $b, r > 0$. De ballen worden willekeurig uit de vaas getrokken zonder teruglegging.

(1) Wat is de kans dat trekking k de eerste trekking is die een rode bal oplevert ($k = 1, \ldots, b + r$).

(2) Bereken de kans dat de laatste trekking een rode bal oplevert.

II. Bij een opleiding wiskunde van Universiteit X, zijn 10% goede studenten, 20% zijn zeer goed, en 70% zijn excellent. De kans dat een random geselecteerde student zakt voor het tentamen IKR is 5%. Verder is het een algemeen gegeven dat zeer goede studenten vijf maal grotere kans hebben om te zakken en goede studenten een tienmaal hogere kans (dan excellente studenten).

(1) Bereken de kans dat een excellente student slaagt.

(2) Bereken de kans dat iemand die slaagt een goede student is.

III. Een continue stochast X heeft de verdelingsfunctie

$$F(x) = \begin{cases} a, & \text{voor } x \leq 0, \\ x^2, & \text{voor } 0 < x < 1, \\ b, & \text{voor } x \geq 1. \end{cases}$$

(1) Bereken de constanten a en b.

(2) Bereken de kansdichtheid $f(x)$ (NB: voor alle $x \in \mathbb{R}$).

(3) Bereken de verwachting en de variantie van X.

(4) Zij U een uniform verdeelde stochast op het interval $[0, 1]$. Voor welke functie $g : [0, 1] \to [0, 1]$ heeft $g(U)$ dezelfde verdeling als X?

IV. Een tweedimensionale continue stochast heeft de kansdichtheid

$$f(x, y) = 8xy \text{ voor } 0 < x \leq y < 1, \text{ en 0 anders.}$$

(1) Bereken de marginale kansdichtheden van X en Y .

(2) Bereken de covariantie van X en Y.

(3) Zijn X en Y onafhankelijk? Beargumenteer uw antwoord.

(4) Bereken de conditionele kansdichtheid van X, gegeven $Y = y$.

(5) Bereken $\mathbf{E}(X|Y)$.

V. De moment genererende functie van een stochast X is gedefineerd als $M_X(t) = \mathbb{E}e^{tX}$.

(1) Bepaal de momentgenererende functie voor een uniforme verdeling op het interval $[a, b]$, $a < b$.

(2) Indien $X \sim \mathsf{Uniform}(0, 1)$ en $Y = 2X + 3$, identificeer de verdeling van Y aan de hand van de momentgenererende functie van Y.

Deel 2 (8 vragen)

VI. Laat X een discrete stochast met waarden in $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Stel verder $\mathbb{E}X^2 < \infty$.

(1) Bewijs dat voor de kansgenererende functie $g_X(t)$ geldt:

$$g''_X(1) = \mathbb{E}[X(X-1)].$$

VII. Beschouw een vertakkingsproces met als offspring-verdeling een binomiale verdeling met parameters 2 en $p \in (0, 1)$. Bereken de uitsterfkans, startend met een individu: $X_0 = 1$, voor

(1) $p \in (0, 0.5)$

(2) $p \in (0.5, 1)$

VIII. Zij $\{Y_n\}$ een rij van onafhankelijke stochasten met verdeling

$$\mathbb{P}[Y_n = 0] = \frac{2}{3},\ \mathbb{P}[Y_n = 1] = \frac{1}{6},\ \mathbb{P}[Y_n = 2] = \frac{1}{6}.$$

Definieer proces $\{X_n\}$ als volgt: $X_0 = 0$ en

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - Y_n, & \text{als } X_n = 3, \\ X_n - 1 + Y_n, & \text{als } 1 \leq X_n \leq 2, \\ Y_n, & \text{als } X_n = 0. \end{cases}$$

(1) Laat zien dat $\{X_n\}$ Markov is. Bepaal de toestandsruimte S en de overgangsmatrix P.

(2) Is de keten aperiodiek, irreducibel?

(3) Bepaal de stationaire verdeling μ. Is deze uniek?

IX. Zij $\{N(t)\}$ een Poisson proces met intensiteit λ.

(1) Wat is de voorwaardelijke verdeling van de verblijfstijd in toestand 0:

$$T = \inf\{t > 0 : \quad N(t) = 1\},$$

gegeven dat $N(1) = 1$?

X. [2 punten!] Welk resultaat (stelling, voorbeeld, etc.) vond je het leukst? Geef een volledige formulering en leg uit waarom het "leuk" is.