

# Tentamen Inleiding Kansrekening, 2 augustus 2012, 14:00-17:00

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk en overzichtelijk te worden opgeschreven. Dit tentamen bestaat uit 2 delen en 22 vragen. Elke vraag (behalve één) is 4 punten waard, en vraag (VII.1) is 6 punten waard. Totaal zijn er dus  $90 = 21 \times 4 + 6$  punten te behalen. U krijgt 10 punten kado.

## Deel 1 (15 vragen)

**I.** Een vaas bevat 6 blauwe, 6 rode en 6 zwarte ballen; 6 ballen willekeurig uit de vaas zijn getrokken zonder teruglegging.

- (1) Bereken de kans dat er precies 2 blauw, 2 rode en 2 zwarte ballen zijn getrokken.
- (2) Stel nu dat gegeven is dat er onder de 6 ballen precies twee rode zijn. Wat is dan de kans dat er ook 2 rode en 2 zwarte ballen zijn getrokken?

**II.** Belastingdienst gebruikt een test methode om fraude te detecteren. Idee van deze test is dat “verzonnen jaarrekening” meer patronen vertonen dan de echte. Indien het bedrijf fraudeert dan is het resultaat van de test met 90% kans positief. Indien het bedrijf toevallige vergissingen maakt dan is het resultaat van de test met 9% kans positief. Indien tenslotte het bedrijf een correcte jaarrekening opgeeft, dan is het resultaat van de test met 1% kans positief. Uit onderzoek blijkt dat 90% een correcte jaarrekening indient, 7% maakt toevallige vergissingen, en 3% fraudeert.

- (1) Wat is de kans dat een willekeurig bedrijf een positief testresultaat heeft?
- (2) Bedrijf heeft een positief testresultaat. Wat is de kans dat hij een vergissing gemaakt heeft?

**III.** Een continue stochast  $X$  heeft de kansdichtheid functie

$$f(x) = \begin{cases} a, & \text{voor } x \leq 0, \\ C\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right), & \text{voor } 0 < x < 1, \\ b, & \text{voor } x \geq 1. \end{cases}$$

- (1) Bereken de constanten  $a, b$  en  $C$  zodanig dat  $f$  een de kansdichtheid functie is.
- (2) Bereken de kansverdeling functie  $F_X(x)$  (NB: voor alle  $x \in \mathbb{R}$ ).
- (3) Bereken de verwachting en de variantie van  $X$ .
- (4) Bepaal de kansdichtheid van  $Y = -\ln(X^3)$ .

**IV.** Een tweedimensionale continue stochast heeft de kansdichtheid

$$f(x, y) = \begin{cases} 3xy^2 + x^3y^2 - x^2y^3 + y & \text{voor } (x, y) \in (0, 1) \\ 0, & \text{anders} \end{cases}$$

- (1) Bereken de marginale kansdichtheden van  $X$  en  $Y$ .
- (2) Bereken de covariantie van  $X$  en  $Y$ .
- (3) Zijn  $X$  en  $Y$  onafhankelijk? Beargumenteer uw antwoord.

(4) Bereken de kans  $\mathbb{P}(X \leq Y)$ .

(5) Bereken  $\mathbf{E}(X|Y)$ .

**V.** Stochast  $X$  heeft een voor een geometrische verdeling  $\text{Geo}(p)$ ,  $p \in (0, 1)$ .

(1) Bepaal de momentgenererende functie  $M_X(t)$ .

(2) Met behulp van  $M_X(t)$ , bepaal de verwachting en de variantie van  $X$ .

## Deel 2 (7 vragen)

**VI.** Docent gooit net zo lang met en dobbelsteen tot hij een 3 krijgt.

(1) Wat is de verwachting van het aantal worpen dat hij moet doen?

(2) Wat is verwachting van het aantal ogen dan hij gooit (voor hij de 3 gooit)?

**VII.** Zij  $\{X_n\}$  een vertakkingsproces. Tijdens de colleges hebben we aangetoond dat

$$\mathbb{E}(X_n) = \mu^n, \quad n \geq 0,$$

waar  $\mu = \mathbb{E}(Z) = \sum_{j=0}^{\infty} j \mathbb{P}[Z = j]$  het verwachte aantal deeltjes in de 1<sup>ste</sup> generatie is.

(1) **[6 punten]** Bewijs de volgende betrekking voor de variantie  $\sigma_n^2 = \text{Var}(X_n)$ :

$$\sigma_n^2 = \sigma_{n-1}^2 \mu^2 + \mu^{n-1} \sigma_1^2.$$

[Hint: gebruik dat  $X_n = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i$ ].

**VIII.** Markov keten  $\{X_n\}$  heeft toestandsruimte  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  een overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Is de keten aperiodiek, irreducibel?

(2) Bepaal de stationaire verdeling  $\mu$ . Is deze uniek?

(3) Bereken de kans

$$P(X_7 = X_5 = 4 | X_2 = 1, X_3 = 3, X_4 = 1).$$

**IX.** Het aantal drukfouten in een boek bedraagt gemiddeld 0.25 per pagina. Hoe groot is de kans op hoogstens twee drukfouten in een hoofdstuk van 10 pagina's onder de veronderstelling dat het aantal meldingen Poissonverdeeld is?