Tentamen Inleiding Kansrekening, 13 juni 2013, 14:00-17:00

Bij dit tentamen is het gebruik van een rekenmachine toegestaan, boeken, handouts, etc, zijn **NIET** toegestaan. De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk en overzichtelijk te worden opgeschreven. Het tentamen bestaat uit 3 delen en 24 vragen. Alle vragen behalve de laatste twee zijn 4 punten waard, en de laatste twee zijn 1 punt waard. In totaal zijn er 90 punten te behalen. U krijgt 10 punten kado.

Deel 1 (14 vragen/56 punten)

1. We hebben drie verschillende vazen en 20 knikkers.

(a) Elke knikker wordt in één van de drie vazen gestopt met gelijke kans. Hoe groot is de kans dat vaas 3 precies 2 knikkers krijgt?

(b) Stel nu dat 12 van de knikkers blauw zijn en de overige 8 knikkers zwart. Op hoeveel verschillende manieren kunnen we die knikkers over de drie verschillende vazen verspreiden? (Hierbij is zowel de kleur van de knikkers als het verschil tussen de vazen van belang.)

2. Een EPO test bij de Tour de France geeft in 95% van de gevallen een juiste conclusie: dit betekent dat 95% van de renners die heeft gebruikt positief test en 95% van de renners die niet heeft gebruikt negatief test. Bekend is dat 1% van de renners EPO gebruikt.

(a) Robert G. test positief. Wat is de kans dat Robert G. inderdaad EPO heeft gebruikt?

(b) Bauke M. wint zonder EPO 2% van de ritten, met EPO wordt dit 4%. Wat is de kans dat Bauke M. de komende rit wint na een positieve test? (ondanks zijn positieve test mag hij wel starten)?

3. De kans op regen op 1 juni en de kans op regen op 2 juni zijn beide gelijk aan $\frac{2}{3}$. De kans dat het allebei de dagen regent is $\frac{1}{2}$. Wat is de kans op minstens één dag regen (1 of 2 juni)?

4. Laat X een continue stochast zijn met kansdichtheid f_X en met $\mathbb{P}(X > 0) = 1$. Zij Y de stochast $Y = X^{-4}$. Bepaal de kansdichtheid van Y.

5. Zij X, Y, Z ongecorreleerde stochasten met varianties σ_X^2, σ_Y^2 en σ_Z^2. Laat $U = X + Z$ en $V = Y + Z$. Bepaal

(a) de covariantie $\mathrm{Cov}(U, V)$;

(b) de correlatiecoëfficient $\rho_{U,V}$.

6. Het paar stochasten (X, Y) is uniform verdeeld over de driehoek Δ met hoekpunten $(0, 0)$, $(1, 2)$, en $(2, 0)$ (m.a.w. de kansdichtheid van (X, Y) is constant op Δ, en 0 daarbuiten).

(a) Wat is de voorwaardelijke kansdichtheid $f_{X|Y}(x|y)$? Wat heeft $X|Y = y$ dus voor kansverdeling?

(b) Bereken $\mathbb{E}(X|Y)$.

7. De stochast T heeft een Poisson verdeling Pois(μ), en de stochast U is uniform verdeeld op $[0, T]$. Bepaal

(a) de onvoorwaardelijke verwachting $\mathbb{E}U$;

(b) de onvoorwaardelijke variantie $\mathrm{Var}(U)$.

8. Bij een call-center komen telefoonoproepen binnen volgens een Poisson proces met een intensiteit van $\lambda = 2$ oproepen per uur.

(a) De enige medewerker gaat buiten roken voor 10 minuten. Hoe groot is de kans dat iemand belt in zijn afwezigheid?

(b) Deze medewerker wordt ontslagen als hij meer dan 1 oproep mist. Hoelang kan hij buiten roken zo danig dat de kans hij zijn baan verliest minder is dan 0.5? Geef je antwoord met een nauwkeurigheid van 10 minuten.

Deel 2 (8 vragen/32 punten)

9. Zij $M(t)$ de momentgenererende functie van een stochast X. Bepaal de momentgenererende functie van de stochast $Y = 3X - 51$. **10.** Laat $X_1, X_2, \ldots$ een rij onafhankelijke stochasten zijn allemaal met verwachting μ en variantie σ^2. Laat $Y_1, Y_2, \ldots$ een rij onafhankelijke Bernoulli stochasten zijn allemaal met parameter p, $p \in (0, 1)$. Gegeven is ook dat de rij $X_1, X_2, \ldots$ onafhankelijk is van de rij $Y_1, Y_2, \ldots$. Laat $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$.

(a) Wat zegt de Wet van de Grote Aantallen over het gedrag van $\frac{1}{n} S_n$ als $n \to \infty$?

(b) Wat zegt de Centrale Limietstelling over het gedrag van $\frac{1}{n} S_n$ als $n \to \infty$?

11. Zij $X_1, \ldots, X_{15}$ onafhankelijk en uniform verdeelde stochasten op $[-1, 1]$. Zij $p = \mathbb{P}(|X_1 + \cdots + X_{15}| > 6)$. Schat p met behulp van

(a) de ongelijkheid van Chebyshev.

(b) de Centrale Limietstelling.

12. We bekijken een Ehrenfest model met N moleculen verdeeld over twee kamers A en B. Stel dat we één molecuul van de N bekijken.

(a) Beschrijf het gedrag van deze ene molecuul met een Markovketen.

(b) Bereken de stationaire verdeling van deze Markovketen en verklaar de link met de stationaire verdeling van het Ehrenfest model.

13. De *House-of-Cards* Markov keten $\{X_n\}$ heeft toestandsruimte $\{0, 1, 2, \ldots\}$ en de overgangskansen

$$p_{i,i+1} = p_{i,0} = \frac{1}{2}, \qquad \text{voor } i = 0, 1, 2, \ldots$$

Zijn de toestanden recurrent of transient (voorbijgaand)?

Deel 3 (2 vragen/2 punten)

Geef van de volgende stellingen aan of ze waar of niet waar zijn. Een uitleg is niet nodig, alleen waar of niet waar antwoorden volstaat.

14. Er bestaan stochasten X, Y zo danig dat $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 1$ en $\mathrm{cov}(X, Y) \geq \frac{3}{2}$.

15. Stochast X heet *symmetrisch* als $\mathbb{P}(X < -t) = \mathbb{P}(X > t)$ voor alle $t \geq 0$. De covariantie van twee symmetrische stochasten is altijd positief.