Tentamen Inleiding Kansrekening, 8 juli 2013, 14:00-17:00

Bij dit tentamen is het gebruik van een rekenmachine toegestaan, boeken, handouts, etc, zijn **NIET** toegestaan. De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk en overzichtelijk te worden opgeschreven. Het tentamen bestaat uit 3 delen en 24 vragen. Alle vragen behalve de laatste twee zijn 4 punten waard, en de laatste twee zijn 1 punt waard. In totaal zijn er 90 punten te behalen. U krijgt 10 punten kado.

Deel 1 (14 vragen/56 punten)

1. We hebben een vaas met 10 rode, 8 blauwe en 6 zwarte knikkers. Daaruit trekken we 6 knikkers zonder terugleggeng.

(a) Hoe groot is de kans dat we 4 rode, 2 blauwe en geen zwarte knikkers trekken?

(b) Wat is de kans op dezelfde uitkomst, maar gegeven dat we geen zwarte knikkers trekken?

2. Een groep bestaat uit 5 excellente, 10 goede, en 15 zwakke studenten. Een excellente student krijgt altijd een 10, goede student krijgt een 10 of een 8 met gelijke kansen, en een zwakke student krijgt een 8,6, of 4 met gelijke kansen. Wat is de kans dat een willekeurig geselecteerde student

(a) een 10 krijgt;

(b) een 8 krijgt.

3. Bewijs dat

(a) voor alle gebeurtenissen A, B,

$$\mathbb{P}(A \,\Delta\, B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B), \quad \text{waar} \quad A \,\Delta\, B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

(b) voor alle gebeurtenissen A, B, C

$$\mathbb{P}(A \,\Delta\, B) \leq \mathbb{P}(A \,\Delta\, C) + \mathbb{P}(C \,\Delta\, B).$$

4. Oppervlakte van een vierkant met een stochastische lengte van de zijde is uniform verdeeld op $[0, 2]$. Bepaal de kansverdeling van de lengte van de zijde.

5. Zij X, Y stochasten met varianties $\sigma_X^2 = 1$, $\sigma_Y^2 = 4$ en correlatiecoefficient $\rho(X, Y) = 1/2$. Bepaal $\mathrm{Var}(3X + 2Y)$.

6. Zij Δ een trapezium met hoekpunten $\{(0,0), (1,1), (2,1), (3,0)\}$. Het paar stochasten (X, Y) is verdeeld met de kansdichtheid

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cy, & (x,y) \in \Delta, \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

(a) Bepaal c.

(b) Bereken de marginale kansdichtheden van X en Y .

(c) Bereken de covariantie van X en Y .

(d) Bereken de conditionele kansdichtheid van X, gegeven Y = y, en bepaal $\mathbb{E}(X|Y)$.

8. Bepaal de verdeling van een som van twee onafhankelijke Poisson stochasten met parameters λ en μ.

9. Op universiteit X sturen studenten emails met vragen naar de docent volgens een Poisson proces met intensiteit $\lambda = 0.1$ emails per uur. Volgens geldende richtlijnen moet de docent deze vragen onmiddellijk beantwoorden. Wat is de kans dat de docent goed nachtrust krijgt tussen 11:00pm en 7:00am?

Deel 2 (8 vragen/32 punten)

10. Bepaal de momentgenerende functie van Poisson verdeling met parameter μ.

11. Gooi herhaaldelijk met een zuivere munt.

(a) Geef een formule voor

$$p_n = \mathbb{P}(\text{minstens } n \text{ koppen gooien in } 2n \text{ worpen}).$$

Wat is de limiet $\lim_{n\to\infty} p_n$?

(b) Bereken ook de $\lim_{n\to\infty} p_n$ met behulp van de Centrale Limiet Stelling.

12. Markov keten $\{X_n\}$ heeft toestandsruimte $S = \{1, \dots, N\}$ en overgansmatrix

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{N-1} & p_N \\ p_N & p_1 & p_2 & \cdots & p_{N-2} & p_{N-1} \\ p_{N-1} & p_N & p_1 & \cdots & p_{N-3} & p_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_2 & p_3 & p_4 & \cdots & p_N & p_1 \end{pmatrix}, \quad p_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

(a) Bepaal de stationaire verdeling.
(b) Bereken de limiet $q_i = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = i)$, $i = 1, \dots, N$.

13. Zij $\{X_i\}$ onafhankelijke stochasten met

$$\mathbb{P}(X_i = -1) = 0.5, \quad \mathbb{P}(X_i = 1) = 0.5.$$

Schat de kans $\mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_{15} > 5)$ met behulp van de ongelijkheid van Chebyshev.
14. De stochastische wandeling op $\mathbb{Z}$ is een Markov keten met overgangskansen

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i + 1 | X_n = i) = p, \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = i - 1 | X_n = i) = 1 - p, \quad p \in (0, 1),$$

Laat zien dat elke toestand $i \in \mathbb{Z}$ is

(a) transient, als $p \neq \frac{1}{2}$,

(b) recurrent, als $p = \frac{1}{2}$.

Deel 3 (2 vragen/2 punten)

Geef van de volgende stellingen aan of ze waar of niet waar zijn. Een uitleg is niet nodig, alleen waar of niet waar antwoorden volstaat.

15. Er bestaat een kansmodel $(\Omega, \mathbb{P})$ en 3 afhankelijke gebeurtenissen $A_1, A_2, A_3 \subset \Omega$ zdd

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j) \quad \forall i \neq j.$$

16. Markov ketens met eindige toestandsruimtes hebben eindig veel stationaire verdelingen.