

Tentamen Inleiding Statistiek

22 januari 2009

Bij dit examen is het gebruik van een zelfgemaakt A4 formuleblad toegestaan. Motiveer steeds uw antwoord. Er zijn 5 opgaven.

1. Stel X_1, X_2, \dots, X_n is een steekproef uit de normale verdeling met verwachting θ en variantie θ^2 . De kansverdeling heeft dichtheid

$$f_{\theta}(x) = \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\theta)^2}{2\theta^2}\right).$$

- (a) Toon aan dat $\bar{X}^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)^2$ geen zuivere schatter is van de variantie θ^2 .
(b) Vind een constante c zodat $c\bar{X}^2$ wèl zuiver is voor de variantie.
(c) Is \bar{X} een voldoende (sufficient) statistiek voor θ ?
2. Stel X_1, X_2, \dots, X_n is een steekproef uit de Rayleigh kansverdeling met dichtheid

$$f_{\theta}(x) = \frac{x}{\theta^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta^2}\right), \quad x \geq 0.$$

- (a) Bepaal de meest aannemelijke (maximum likelihood) schatter van θ .
(b) Bepaal de asymptotische variantie van de MLE.
(c) Vind een momenten methode schatter voor θ .
3. Zij $f_0(x) = 2x$ ($0 < x < 1$) en $f_1(x) = 1$ ($0 < x < 1$). Stel X_1, X_2, \dots, X_n is een steekproef uit een kansverdeling met dichtheid f , waarbij we willen toetsen

$$H_0 : f = f_0 \quad \text{versus} \quad H_1 : f = f_1$$

We kiezen significantie niveau $\alpha = 0.05$.

- (a) Bepaal de likelihood ratio.
(b) Stel $n = 1$; we hebben dus één waarneming. Bepaal de kritieke waarde van de likelihood ratio toets.
(c) Bepaal het onderscheidend vermogen (power) van de likelihood ratio toets.
(d) Stel we nemen $X = 0.63$ waar. Wat is de p -waarde van deze waarneming?
(e) Wordt de nulhypothese verworpen op basis van de waarneming $X = 0.63$?

4. Zij X binomiaal verdeeld met parameters n en p . We toetsen

$$H_0 : p = 1/2 \quad \text{versus} \quad H_1 : p > 1/2$$

en gebruiken daarvoor de gegeneraliseerde likelihood ratio,

$$\Lambda^* = \frac{\max_{p \in H_0} \text{lik}(p)}{\max_{p \in H_1} \text{lik}(p)}.$$

- (a) Laat zien dat de gegeneraliseerde likelihood ratio toets equivalent is met een toets die verwerpt voor grote waarden van X .
 - (b) Stel $n = 5$ en kies significantie niveau $\alpha = 0.05$. Voor welke waarden van X wordt de nulhypothese verworpen?
 - (c) Is de gegeneraliseerde likelihood ratio toets uniform meest onderscheidend (uniformly most powerful, UMP)?
5. De oplosbaarheid van een chemische stof wordt bij verschillende temperaturen bepaald. Bij elke temperatuur doen we één of twee waarnemingen. We vinden

temperatuur (celsius)	9	10	11	13	15
oplosbaarheid bij de 1e meting	4,3	5,2	5,8	6,3	7,8
oplosbaarheid bij de 2e meting			6,1		8,2

- (a) We veronderstellen dat er een lineair verband bestaat tussen de oplosbaarheid en de temperatuur. Geef de kleinste kwadraten schatters voor dit verband.
- (b) Geef een schatting van de standaard afwijking van de geschatte parameters.