Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden

Tentamen Inleiding Statistiek

21 januari 2011, 10:00–13:00

Het tentamen is met gesloten boek, alleen zakrekenmachines (ook grafisch) zijn toegestaan. Alles dient goed leesbaar te worden opgeschreven. Beredeneer alle antwoorden.

Opgave 1

Gegeven is een steekproef van n onafhankelijke trekkingen $X_1, \ldots, X_n$ van de verschoven exponentiële verdeling met kansdichtheid

$$f_\beta(x) = \mathrm{e}^{-(x-\beta)}, \qquad x \geq \beta,$$

β is onbekend.

(a) Bereken de meest aannemelijke schatter (ofwel, max-likelihood-schatter) $\hat{\beta}$ voor β.

(b) Is $\hat{\beta}$ een zuivere schatter?

(c) Is $\hat{\beta}$ een konsistente schatter?

(d) Is de variantie van $\hat{\beta}$ overeenkomstig met de ondergrens van Cramér-Rao?

Opgave 2

Juist of fout? Vergeet niet je antwoord toe te lichten.

(a) Een type-I fout treedt op als de toetsingsgrootheid in de verwerpingsbereik van een toets valt.

(b) Het onderscheidingsvermogen (macht) van een toets wordt bepaald van de verdeling van de toetsingsgrootheid onder de nulhypothese.

(c) De p-waarde van een toets is de kans dat de nulhypothese correct is.

(d) Als een chi-kwadraat verdeling met 4 vrijheidsgraden een waarde heeft van 8.5, dan is de p-waarde kleiner dan 0.05.

Opgave 3

Hardy-Weinberg-Model. Het type Haptoglobin heeft drie mogelijke genotypes: AA, Aa, en aa. Als de verdeling van genen over een populatie in equilibrium is, zijn de bijbehorende kansen $(1-\theta)^2$, $2\theta(1-\theta)$ en θ^2, voor een onbekende parameter $\theta \in [0,1]$. Hieronder vind je het Haptoglobin type voor $n = 190$ mensen.

Haptoglobin type		
AA	Aa	aa
10	68	112

(a) Bereken de meest aannemelijke schatter (max-likelihood-schatter) $\hat{\theta}$ van θ.

(b) Wat is de asymptotische variantie van $\hat{\theta}$?

(c) Bereken een (approximatief) 99% betrouwbaarheidsinterval voor θ.

(d) Toets de nulhypothese $H_0\colon \theta = 1/2$ tegen het alternatief $H_1\colon \theta \neq 1/2$ met significantieniveau $\alpha = 0,01$.

Opgave 4

De Cauchy verdeling heeft de kansdichtheid

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+x^2}\right), \qquad x \in (-\infty, +\infty).$$

Stel je hebt een steekproef van deze verdeling (met onafhankelijke trekkingen). Wat is de kwalitatieve vorm van een normaliteitsplot van deze steekproef?

Opgave 5

Beschouw het lineaire model

$$Y_i = X_i\,\beta + e_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

waarbij de fouten onafhankelijk zijn. Stel dat voor een gegeven dataverzameling $(Y_1, X_1), \ldots, (Y_n, X_n)$ de e_i normaal verdeeld zijn met verwachting 0 en variantie σ^2.

(a) Bewijs de formule voor de kleinste kwadraten schatter van β.

(b) Toets de significantie van het model (d.w.z., toets de nulhypothese $H_0\colon \beta = 0$ tegen het alternatief $H_1\colon \beta \neq 0$).

Eventueel handig:

Exponentiële verdeling met parameter $\alpha > 0$.

Kansdichtheid: $f(x) = \alpha\, \mathrm{e}^{-\alpha x}, \qquad x \geq 0.$

Cumulatieve verdelingsfunctie: $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha x}, \qquad x \geq 0.$

Verwachtingswaarde: $1/\alpha$

Variantie: $1/\alpha^2$

Multinomiale verdeling. Als een experiment k verschillende uitkomsten heeft, met kansen $p_1, \ldots, p_k$ op deze uitkomsten (waarbij dus geldt dat $p_1 + \cdots + p_k = 1$) en X_i is het aantal keren dat de uitkomst i verkregen wordt in n onafhankelijke uitvoeringen van het experiment, dan wordt de kansverdeling van de vector $(X_1, \ldots, X_k)$ gegeven door:

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! \cdots x_k!}\, p_1^{x_1} \cdots p_k^{x_k},$$

waarin $(x_1, \ldots, x_k)$ niet-negatieve gehele getallen zijn, met $x_1 + \cdots + x_k = n$.

Elk van de stochastische variabelen X_i is binomiaal verdeeld, zodat de verwachtingswaarde gelijk is aan

$$\mathrm{E}(X_i) = np_i,$$

en de variantie gegeven wordt door

$$\mathrm{Var}(X_i) = np_i(1 - p_i).$$

Verder uitgedeelde materialen:

Tabel χ^2-verdeling

Tabel standaardnormale verdeling