Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden

Hertentamen Inleiding Statistiek

23 maart 2011, 10:00–13:00

Je mag geen boek of aantekeningen gebruiken, zakrekenmachines (ook grafisch) zijn wel toegestaan. Schrijf leesbaar en motiveer je antwoorden.

Opgave 1

Beschouw de discrete stochast X met verdeling $P(X = 1) = \theta = 1 - P(X = 2)$, met θ een onbekende constante. De uitslagen van drie onafhankelijke trekkingen zijn $X_1 = 1$, $X_2 = 2$ en $X_3 = 2$.

(a) Gebruik de momenten-methode om een schatter van θ te berekenen.

(b) Wat is de aannemelijkheidsfunctie ('likelihood function') $\text{lik}(\theta)$?

(c) Bereken de meest aanneemlijke schatter ('maximum likelihood estimator') van θ.

Opgave 2

Goed of fout:

(a) De p-waarde van een toets is de kans dat de nulhypothese onjuist is.

(b) De kans op het verwerpen van de nulhypothese terwijl deze onjuist is, heet het *onderscheidingsvermogen ('macht' / 'power')* van een toets.

(c) Als een schatter $\hat{\theta}$ voor een parameter θ zuiver ('unbiased') en consistent is, dan is de variantie $\text{Var}(\hat{\theta})$ gelijk aan de gemiddelde kwadratische fout ('mean square error') MSE.

Licht je antwoorden toe.

Opgave 3

Defineer de term *voldoende ('sufficient') statistiek*, en redeneer waarom het wenselijk is de schatter van een bepaald parameter op een voldoende ('sufficient') statistiek te baseren.

Opgave 4

Beschouw de χ^2-aanpassing voor een multinomiale verdeling met twee mogelijke uitkomsten. Noem X_1 en X_2 het aantal uitkomsten van type 1 en 2, respectievelijk, en p_1 en p_2 de veronderstelde kansen op deze twee typen. Pearson's χ^2-statistiek word gegeven door

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Laat zien dat deze grootheid bij benadering χ^2-verdeeld is met 1 vrijheidsgraad.

Hint: Bepaal eerst de asymptotische verdeling van

$$\frac{X_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}.$$

Je mag gebruiken dat X_1 binomiaal verdeeld is met parameters n en p_1 (dus de verwachting is $\mathrm{E}(X_1) = np_1$ en de variantie $\mathrm{Var}(X_1) = np_1(1-p_1)$).

Opgave 5

Neem aan dat $X_1, \ldots, X_n$ onderling onafhankelijk en identiek verdeelde trekkingen zijn uit een tweezijdig exponentieel verdeelde stochast met kansdichtheid

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} \exp\{-\lambda|x|\}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Bepaal een likelihood-ratio toets voor de nulhypothese $H_0\colon \lambda = \lambda_0$ tegen het alternatief $H_1\colon \lambda \neq \lambda_0$. Is deze toets uniform meest onderscheidend ('uniformly most powerful')?

Opgave 6

Beschouw het model

$$Y_i = X_i\,\beta_1 + X_i^2\,\beta_2 + e_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Stel dat voor een gegeven dataverzameling $(Y_1, X_1), \ldots, (Y_n, X_n)$ de fouten e_i onderling onafhankelijk en normaal verdeeld zijn met verwachting 0 en variantie σ^2.

(a) Bepaal de kleinste kwadraten schatter van $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$.

(b) Leid een uitdrukking voor de covariantie matrix $\Sigma_{\hat{\boldsymbol{\beta}}}$ van deze schatter af.