



Hertentamen Inleiding Statistiek

26 maart 2012, 14:00–17:00

Je mag geen boek of aantekeningen gebruiken, zakrekenmachines (ook grafisch) zijn wel toegestaan. Schrijf leesbaar en motiveer je antwoorden.

Opgave 1

Beschouw een verdeling met kansdichtheid

$$f(x) = \begin{cases} a x^{a-1} & \text{als } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{elders,} \end{cases}$$

met onbekende parameter $a > 1$.

- Gebruik de momenten-methode om een schatter voor a te bepalen.
- Bepaal de meest aannemelijke schatter (*maximum likelihood estimator*), en ook zijn asymptotische variantie.
- Bepaal een voldoende (*sufficiënte*) statistiek voor a .

Opgave 2

Neem aan dat X_1, \dots, X_n onderling onafhankelijk en identiek verdeelde trekkingen zijn uit een normale verdeling met gemiddelde $\mu = 0$. Een formule voor de kansdichtheid staat op de achterkant. De parameter σ^2 is onbekend, en we toetsen de nulhypothese

$$H_0: \sigma^2 = 10 \quad \text{tegen het alternatief} \quad H_1: \sigma^2 = 20.$$

- Bepaal de likelihood ratio toets voor deze situatie. Leid een formule af die aangeeft voor welke uitkomsten de nulhypothese wordt verworpen (voor gegeven significantieniveau α).
- Is de likelihood ratio toets uniform meest onderscheidend (*uniformly most powerful*) als je tegen het alternatief $H_1: \sigma^2 > 10$ toetst?

Opgave 3

Gegeven zijn twee kansdichtheden,

$$f_0(x) = \begin{cases} 2x & \text{als } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{elders,} \end{cases} \quad \text{en} \quad f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

Stel X is één waarneming uit een zekere kansverdeling met dichtheid f , waarbij we willen toetsen

$$H_0: f = f_0 \quad \text{tegen het alternatief} \quad H_1: f = f_1.$$

- Bepaal de likelihood ratio. Voor welke waarden van X wordt de nulhypothese verworpen, als het significantieniveau $\alpha = 5\%$ wordt gekozen?
- Geef een definitie van het onderscheidingsvermogen (*power*) van een toets, en bereken het onderscheidingsvermogen voor de likelihood ratio toets uit onderdeel (a).
- Stel we nemen $X = 0.45$ waar. Wat is de p -waarde van deze waarneming? Verwerp je de nulhypothese op basis van deze waarneming?

Opgave 4

We beschouwen het lineaire model

$$Y_i = \beta_0 + X_i \beta_1 + e_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

waarbij de fouten e_i onderling onafhankelijk en *normaal* verdeeld zijn met verwachting 0 en variantie σ^2 . (Wij noemden dit het “standaard-plus” model.)

- Bepaal de gezamenlijke kansdichtheid van de Y_i (voor gegeven $\beta_0, \beta_1, X_1, \dots, X_n$). Dit is de aannemelijkheidsfunctie (*likelihood function*).
- Leid vervolgens de meest aannemelijke schatter (*max likelihood estimator*) van β_0 en β_1 af, en verifieer dat deze gelijk is aan de kleinste kwadraten schatter.

De kansdichtheid voor een normale verdeling met gemiddelde μ en variantie σ^2 wordt gegeven door

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$