Tentamen Inleiding Besliskunde (10 januari 2003, 10.00-13.00)

Opgave 1

a. Los het volgende LP-probleem op:

$$min \left\{ -3x_1 + x_2 + x_3 \;\middle|\; \begin{array}{rcrcrll} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \leq 11; & x_1 \geq 0 \\ -4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \geq 3; & x_2 \geq 0 \\ 2x_1 & & & - & x_3 & = -1; & x_3 \geq 0 \end{array} \right\}$$

b. Formuleer het duale probleem en geef ook daarvan een optimale oplossing.

c. Pas gevoeligheidsanalyse toe op de coëfficiënt van x_2 in de doelfunctie en op de coëfficiënt in de eerste rij van het rechterlid.

Opgave 2

Beschouw het LP-probleem $max\{p^T x \mid Ax \leq b; x \geq 0\}$ met A een $m \times n$-matrix.

a. Geef aan wat een *bruikbare richting* in een toegelaten punt x is en bewijs dat een toegelaten punt x een optimale oplossing is d.e.s.d. als in x geen bruikbare richting is.

b. Bewijs het volgende resultaat: een toegelaten punt x is een optimale oplossing d.e.s.d. als er een $u \in \mathbb{R}^m$ en een $v \in \mathbb{R}^n$ bestaan zdd. $u \geq 0, v \geq 0, p = A^T u - v, v^T x = 0$ en $u^T(b - Ax) = 0$.

c. Stel de KKT-voorwaarden voor dit LP-probleem op en laat zien dat deze overeenkomen met de optimaliteitsvoorwaarden uit onderdeel b.

Opgave 3

a. Beschrijf de methode van Dijkstra voor het kortste pad probleem.

b. Laat met een voorbeeld zien dat de methode niet altijd correct is als er negatieve lengtes zijn.

c. Bewijs dat de methode van Dijkstra eindigt met de lengtes van kortste paden en met een boom van kortste paden.

d. Pas de methode toe op een netwerk met lengtematrix

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 5 & 3 & 7 \\ \infty & \infty & 0 & 2 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Opgave 4

a. Beschrijf de methode van Cauchy om een onbeperkt optimaliseringsprobleem op te lossen.

b. Beschouw de functie $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2(x_2 - 1)^2 + 2x_1x_2$. Voer één iteratiestap van deze methode uit om de functie te maximaliseren, startend met $x^0 = (1, 1)$.

c. Wat betekent het begrip *sterke convergentie*? Bewijs dat de methode van Cauchy sterk convergent is.

Opgave 5

a. Beschrijf het simplex-achtige algoritme om het kwadratisch programmeringsprobleem $max\{p^t x - \frac{1}{2}x^t C x \mid Ax \leq b;\ x \geq 0\}$ op te lossen.
Stel daartoe eerst de KKT-voorwaarden op.

b. Pas dit algoritme toe op het volgende probleem:

$$max \left\{ 3x_1 + 2x_2 - x_2^2 \;\middle|\; \begin{array}{r} x_1 - x_2 \leq 0 \\ 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Puntenwaardering

Het aantal te behalen punten voor de diverse onderdelen is als volgt:

opgave 1a	:	10 punten;	opgave 3c	:	8 punten;
opgave 1b	:	4 punten;	opgave 3d	:	4 punten;
opgave 1c	:	6 punten;	opgave 4a	:	6 punten;
opgave 2a	:	4 punten;	opgave 4b	:	4 punten;
opgave 2b	:	8 punten;	opgave 4c	:	10 punten;
opgave 2c	:	8 punten;	opgave 5a	:	10 punten;
opgave 3a	:	6 punten;	opgave 5b	:	10 punten;
opgave 3b	:	2 punten;			