Tentamen Inleiding Besliskunde, 25 april 2003, 14.00 - 17.00 uur

Opgave 1

a. Los het volgende LP-probleem op:

$$max \left\{ x_1 - 2x_2 - x_3 \;\middle|\; \begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 2; \quad x_1 \geq 0 \\ x_1 & & & - & 2x_3 & \leq 1; \quad x_2 \geq 0 \\ -x_1 & + & x_2 & & & \geq 0; \quad x_3 \geq 0 \end{array} \right\}$$

b. Formuleer het duale probleem en geef ook daarvan de optimale oplossing.

c. Pas gevoeligheidsanalyse toe op de coëfficiënt van x_2 in de doelfunctie en op de coëfficiënt in de tweede rij van het rechterlid.

Opgave 2

Beschouw het LP-probleem $\{p^T x \mid Ax = b;\ x \geq 0\}$ met A een $m \times n$-matrix met rang m. Beschrijf de affiene schaling methode om dit probleem op te lossen. Leid in ieder geval af hoe de richtingsvector s moet worden gekozen zódat voor $\|s\| = 1$ de maximale stijging van de doelfunctie wordt verkregen. Geef ook aan hoe de schaling van de variabelen wordt uitgevoerd.

Opgave 3

Beschouw het kortste pad probleem voor het netwerk met lengtematrix

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 5 & 6 & 8 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 2 \\ \infty & \infty & -1 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Stel de Belmann-vergelijkingen voor dit probleem op (niet in algemene termen maar met de concrete getallen van L).

b. Beschrijf het simplex algoritme om het kortste pad probleem op te lossen.

c. Voer voor het getallenvoorbeeld twee iteratiestappen van dit simplex algoritme uit.

Opgave 4

Beschouw een symmetrisch handelsreizigersprobleem dat aan de driehoeksongelijkheid voldoet.

a. Beschrijf de heuristische methode die gebaseerd is op een optimale opspannende boom en een optimale koppeling.

b. Hoe is de kwaliteit van een heuristiek gedefinieerd? Toon aan dat de kwaliteit van de heuristiek uit onderdeel a 1.5 is.

c. Pas deze methode toe op volgende afstandsmatrix L:

$$L = \begin{pmatrix} \infty & 3 & 4 & 4 & 10 \\ 3 & \infty & 3 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & \infty & 5 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & \infty & 7 \\ 10 & 7 & 5 & 7 & \infty \end{pmatrix}$$

Opgave 5

Beschouw het niet-lineaire optimaliseringsprobleem in de gedaante:

$$max\{f(x) \mid g_i(x) \leq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m\}. \tag{1}$$

a. Hoe luiden de KKT-voorwaarden voor dit probleem?

b. Veronderstel dat de functie $f(x)$ concaaf is en dat het toegelaten gebied van (1) convex is. Indien x^* toelaatbaar is en aan de KKT-voorwaarden is voldaan, dan is x^* een globaal optimum van (1). Bewijs dit.

c. Pas het bovenstaande toe om een optimale oplossing te vinden van het probleem $max\{-x_1^2 - x_2^2 \mid x_1 + x_2 \geq 2\}$.

d. Stel het duale probleem van (1) op en pas dit toe om het duale probleem van het probleem uit onderdeel d op te stellen; tracht dit duale probleem ook op te lossen.

Waardering

Het aantal te behalen punten voor de diverse onderdelen is als volgt:

opgave 1a	:	12 punten;	opgave 4a	:	4 punten;
opgave 1b	:	4 punten;	opgave 4b	:	12 punten;
opgave 1c	:	4 punten;	opgave 4c	:	4 punten;
opgave 2	:	20 punten;	opgave 5a	:	4 punten;
opgave 3a	:	6 punten;	opgave 5b	:	8 punten;
opgave 3b	:	8 punten;	opgave 5c	:	4 punten;
opgave 3c	:	6 punten;	opgave 5d	:	4 punten.