Tentamen Inleiding Besliskunde (15 januari 2004, 10.00-13.00)

Opgave 1

a. Los het volgende LP-probleem met de simplex-methode op:

$$min \left\{ x_1 + x_3 \;\middle|\; \begin{array}{ccccccl} & & x_2 & - & x_3 & \leq 1; & x_1 \geq 0 \\ x_1 & & & - & x_3 & \leq 2; & x_2 \geq 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & \geq 4; & x_3 \geq 0 \end{array} \right\}$$

b. Is deze oplossing uniek? Zo niet, geef dan alle optimale oplossingen.

c. Formuleer het duale probleem en geef ook daarvan een optimale oplossing.

d. Pas gevoelingheidsanalyse toe op de coëfficiënt van x_2 in de doelfunctie en op de coëfficient in de derde rij van het rechterlid.

Opgave 2

Laat H een heuristiek zijn voor een combinatorisch optimaliseringsprobleem.

a. Hoe is $k(H)$, de kwaliteit van heuristiek H, gedefinieerd?

b. Beschouw het handelsreizigersprobleem en veronderstel dat $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.
Toon aan dat voor iedere $c \geq 1$ er geen polynomiale heuristiek H bestaat met $k(H) \leq c$.

c. Beschouw een symmetrisch handelsreizigersprobleem dat aan de driehoeksongelijkheid voldoet.

(i) Beschrijf de heuristische methode die gebaseerd is op een minimale opspannende boom en een volmaakte koppeling met minimale lengte.

(ii) Toon aan dat de kwaliteit van deze heuristiek gelijk is aan $\frac{3}{2}$.

Opgave 3

Beschouw het niet-lineaire optimaliseringsprobleem in de gedaante:

$$max\{f(x) \mid g_i(x) \leq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m\}. \tag{1}$$

a. Hoe luiden de KKT-voorwaarden voor dit probleem?

b. Veronderstel dat de functie $f(x)$ concaaf is en dat het toegelaten gebied van (1) convex is. Indien x^* toelaatbaar is en aan de KKT-voorwaarden is voldaan, dan is x^* een globaal optimum van (1). Bewijs dit.

c. Pas het bovenstaande toe om een optimale oplossing te vinden van het probleem $max\{-x_1^2 - x_2^2 \mid x_1 + x_2 \geq 2\}$.

d. Stel het duale probleem van (1) op en pas dit toe om het duale probleem van het probleem uit onderdeel c op te stellen; tracht dit duale probleem ook op te lossen.

Opgave 4

Een gokker heeft een beginkapitaal van i euro met $i \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$. Hij zet elke keer 1 euro in. Met kans p wint hij 1 euro (hij ontvangt dan 2 euro terug) en met kans $1-p$ verliest hij 1 euro (hij ontvangt dan niets terug). Hij stopt als hij ofwel alles verloren heeft, ofwel een kapitaal van N euro heeft vergaard.

a. Wat voor soort Markov keten geeft bovenstaand probleem?

b. Leid een formule af voor de winstkans f_{iN}, d.w.z. de kans dat hij eindigt met een kapitaal van N euro als hij begonnen is met i euro ($1 \le i \le N-1$).

c. Veronderstel vervolgens dat de gokker, indien hij in het bezit is van een kapitaal j, een bedrag $a \in \{1, 2, \ldots, j\}$ kan inzetten (bij winst levert dat een winst op van a extra, bij verlies is hij a euro kwijt).
Stel de optimaliteitsvergelijking op voor het probleem om, gegeven beginkapitaal i, de winstkans te maximaliseren, waarbij $0 \le i \le N$.

d. Stel een LP-probleem op dat om deze maximale winstkans te bepalen.
Formuleer eveneens het duale probleem en geef aan hoe een optimale strategie uit de oplossing van het duale probleem is te verkrijgen.

Puntenwaardering

Het aantal te behalen punten voor de diverse onderdelen is als volgt:

opgave 1a	:	13 punten;	opgave 3b	:	10 punten;
opgave 1b	:	4 punten;	opgave 3c	:	5 punten;
opgave 1c	:	4 punten;	opgave 3d	:	5 punten;
opgave 1d	:	4 punten;	opgave 4a	:	3 punten;
opgave 2a	:	3 punten;	opgave 4b	:	12 punten;
opgave 2b	:	10 punten;	opgave 4c	:	4 punten;
opgave 2c	:	12 punten;	opgave 4d	:	6 punten;
opgave 3a	:	5 punten;			