Tentamen Inleiding Besliskunde (10 juni 2004, 10.00-13.00)

Opgave 1

a. Los het volgende LP-probleem op:

$$max \left\{ -4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \;\middle|\; \begin{array}{ccccccl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq 4; & x_1 \geq 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = 1; & x_2 \geq 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \geq 2; & x_3 \geq 0 \end{array} \right\}$$

b. Formuleer het duale probleem en geef ook daarvan een optimale oplossing.

c. Hoe luidt de optimale oplossing als een variabele $x_4 \geq 0$ wordt toegevoegd met in de doelfunctie de coëfficiënt -1, en in de drie beperkingen de coëfficiënten -2, 0 en 1, respectievelijk. Beantwoord dit onderdeel zonder het nieuwe probleem van vooraf aan op te lossen, maar door m.b.v. het optimale tableau uit onderdeel a B^{-1} op te stellen, hiermee de overige gegevens te bepalen en het uitgebreide tableau te optimaliseren.

Opgave 2

Beschouw het Handelsreizigersprobleem. Als we proberen hiervoor een mathematische formulering te vinden, dan ligt het voor de hand om (0,1)-variabelen x_{ij} te introduceren met de volgende interpretatie: $x_{ij} = 0$ (1) betekent dat de directe verbinding van stad i naar stad j niet (wel) wordt gekozen. De kosten minimaliseren, terwijl iedere stad precies één keer wordt bereikt en er ook één keer wordt vertrokken, geeft de volgende formulering:

$$min \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, 1 \leq j \leq n \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, 1 \leq i \leq n \\ x_{ij} \in \{0,1\} \text{ voor alle } (i,j) \end{array} \right\} \tag{1}$$

Bovenstaande formulering is nog niet correct omdat subtours niet worden uitgesloten.

a. Geef een correcte formulering door beperkingen toe te voegen, zonder het aantal beslissingsvariabelen uit te breiden, die subtours uitsluiten en toon aan dat deze formulering correct is.

b. Geef een correcte formulering door beperkingen toe te voegen, zonder het aantal beslissingsvariabelen uit te breiden, gebasserd op sneden en toon aan dat deze formulering correct is.

c. Geef een correcte formulering door beperkingen en nieuwe beslissingsvariabelen toe te voegen, waarmee subtours worden uitgesloten en toon aan dat deze formulering correct is.

Opgave 3

a. Beschrijf de methode van Cauchy om een onbeperkt optimaliseringsprobleem op te lossen.

b. Beschouw de functie $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2(x_2 - 1)^2 + 2x_1x_2$. Voer één iteratiestap van deze methode uit om de functie te maximaliseren, startend met $x^0 = (1, 1)$.

c. Wat betekent het begrip *sterke convergentie*? Bewijs dat de methode van Cauchy sterk convergent is.

Opgave 4

a. Zij x een stationaire kansverdeling van de overgangsmatrix P.

Zij T de verz. van de transiënte toestanden en R_k de k-de recurrente klasse, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Bewijs dat geldt: $x_i = \begin{cases} 0 & \text{als } \ i \in T \\ c_k p^*_{ii} & \text{als } \ i \in R_k, \ \text{met } c_k \geq 0, 1 \leq k \leq m, \text{en } \sum_{k=1}^m \ c_k = 1. \end{cases}$

b. Beschouw de Markov keten met overgangsmatrix: $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(i) Bepaal de stationaire matrix van P.

(ii) Bepaal alle stationaire kansverdelingen van P.

c. Bepaal de eerste doorkomsttijden naar toestand 1.

Opgave 5

Beschouw het optimaal stoppen van een Markov keten met de volgende data.

$S = \{1, 2, 3, 4\}$; $r_1 = -2$; $r_2 = -1$; $r_3 = 0$; $r_4 = -1$; $s_i = -2, 1 \leq i \leq 4$.

$p_{11} = 1$; $p_{12} = 0$; $p_{13} = 0$; $p_{14} = 0$; $p_{21} = \frac{1}{8}$; $p_{22} = \frac{1}{8}$; $p_{23} = \frac{1}{2}$; $p_{24} = \frac{1}{4}$;

$p_{31} = \frac{1}{3}$; $p_{32} = \frac{1}{3}$; $p_{33} = \frac{1}{3}$; $p_{34} = 0$; $p_{41} = \frac{1}{4}$; $p_{42} = \frac{1}{8}$; $p_{43} = \frac{1}{2}$; $p_{44} = \frac{1}{8}$.

a. Stel voor dit model de optimaliteitsvergelijkingen op;

b. Stel voor dit model het duale LP-probleem op.

Puntenwaardering

Het aantal te behalen punten voor de diverse onderdelen is als volgt:

opgave 1a	:	12 punten;	opgave 3c	:	10 punten;
opgave 1b	:	4 punten;	opgave 4a	:	8 punten;
opgave 1c	:	10 punten;	opgave 4b(i)	:	5 punten;
opgave 2a	:	6 punten;	opgave 4b(ii)	:	5 punten;
opgave 2b	:	6 punten;	opgave 4c	:	4 punten;
opgave 2c	:	8 punten;	opgave 5a	:	5 punten;
opgave 3a	:	6 punten;	opgave 5b	:	5 punten;
opgave 3b	:	6 punten;			