Technische Universiteit Delft — Mekelweg 4
Fac. der Technische Wiskunde en Informatica — 2628 CD Delft

Tentamen wi1138 Kansrekening
26 maart 2003, 9.00–10.30 uur

Toelichting. Er wordt verwacht dat je bij elke vraag een uitwerking geeft voorzien van toelichting en motivering. Alleen het antwoord levert niets op. De vragen hebben alle hetzelfde gewicht. Bij dit examen is het gebruik van een rekenmachine en een zogenaamd *cheat-sheet* toegestaan: twee door jezelf op normale wijze beschreven kantjes A4 met materiaal naar keuze, of wat redelijkerwijs als het equivalent daarvan gezien kan worden.

Nieuwe stijl: 1–6. Oude stijl: 1–5 en 7.

1. Gegeven onafhankelijke stochasten X en Y met kansdichtheid:

$$f(u) = \begin{cases} 0 & \text{voor } u \leq 1, \\ \frac{1}{u^2} & \text{voor } u > 1. \end{cases}$$

   Bepaal de verdelingsfunctie van $Z = \frac{1}{\min(X,Y)}$.

2. Groep 1 bestaat uit 20 mannen en 30 vrouwen. Groep 2 telt 75% mannen en 25% vrouwen. We kiezen een willekeurig persoon uit groep 1 en vervolgens een willekeurig persoon uit groep 2. Zij M de gebeurtenis "uit groep 1 is een man gekozen", en G: "het geslacht van de gekozen personen is verschillend." Bepaal $\mathrm{P}(G \mid M)$ en $\mathrm{P}(M \mid G)$.

3. Bepaal de correlatie tussen U en U^2 wanneer U een $U(0,a)$-verdeling heeft. Hierbij is a een positief getal.

4. Gegeven onafhankelijke stochasten $X_1, X_2, X_3, \ldots$, alle met de volgende kansverdeling: $\mathrm{P}(X_i = 0) = \mathrm{P}(X_i = 2) = \frac{1}{4}$ en $\mathrm{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}$. Bepaal de kansgenererende functie van $T = X_1 + \cdots + X_n$. Kun je herkennen welke verdeling T heeft?

5. De simultane kansdichtheid van X en Y wordt gegeven door

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{5}{16}x^2 y & \text{voor } 0 < y < x < 2, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

   Bepaal de marginale verdelingsfunctie van X.

6. Met een onzuivere munt (kans op kop: p) wordt gegooid totdat er tweemaal achter elkaar kop optreedt. We bekijken het hiervoor benodigde aantal worpen N. Zij $v = \mathrm{E}[N]$. Definieer $X = 1$ indien de eerste worp kop is en $X = 0$ indien munt. Bepaal $\mathrm{E}[N|X=0]$ en $\mathrm{E}[N|X=1]$ (hierin mag de onbekende v voorkomen) en druk vervolgens $\mathrm{E}[N]$ uit in p. (Controle: wat moet het antwoord zijn voor $p = 1$?).

7. In een land hebben auto's nummerborden met 5 cijfers van 1 tot en met 9 (geen nullen dus). Hoeveel nummerborden zijn er waar geen even cijfers direct naast elkaar staan, en ook geen oneven cijfers direct naast elkaar (dus 12345 is goed, en 13324 is om twee redenen fout)? Hoeveel nummerborden vormen een strikt oplopende rij cijfers (dus 12349 goed, maar 13324 en 12334 fout)?

Uitwerkingen

1 De stochasten X en Y nemen waarden aan in $(1, \infty)$, en $\min(X, Y)$ dus ook. $Z = \frac{1}{\min(X,Y)}$ is derhalve een stochast met waarden in $(0, 1)$, dus $F_Z(z) = 0$ voor $z \leq 0$ en $F_Z(z) = 1$ voor $z \geq 1$. Voor $0 < z < 1$ vinden we:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Z \leq z) &= \mathrm{P}\left(\frac{1}{\min(X,Y)} \leq z\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\min(X,Y) \geq \frac{1}{z}\right) \\
&= \mathrm{P}\left(X \geq \frac{1}{z}\right) \cdot \mathrm{P}\left(Y \geq \frac{1}{z}\right) \qquad \text{wegens onafhankelijkheid van } X \text{ en } Y \\
&= \left(\mathrm{P}\left(X \geq \frac{1}{z}\right)\right)^2 \qquad X \text{ en } Y \text{ hebben dezelfde verdeling.}
\end{aligned}$$

Nu geldt voor $x \geq 1$:

$$\mathrm{P}(X \geq x) = \int_x^\infty \frac{1}{u^2}\, du = \left[-\frac{1}{u}\right]_x^\infty = \frac{1}{x},$$

zodat volgt voor $0 < z < 1$:

$$\mathrm{P}(Z \leq z) = z^2.$$

Samenvattend is het antwoord dus:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{voor } z \leq 0, \\ z^2 & \text{voor } 0 < z < 1, \\ 1 & \text{voor } z \geq 1. \end{cases}$$

2 Voor $\mathrm{P}(G \mid M)$ komt de vraag overeen met de kans dat uit de tweede groep een vrouw gekozen wordt, dus 1/4.
Voor $\mathrm{P}(M \mid G)$ gebruiken we de definitie:

$$\mathrm{P}(M \mid G) = \frac{\mathrm{P}(M \cap G)}{\mathrm{P}(G)}.$$

Verder is G de disjuncte vereniging van $M \cap G$ en $M^c \cap G$. De gebeurtenis $M \cap G$ komt neer op "uit de eerste groep een man, en uit de tweede een vrouw", dus met kans: $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$. De kans $\mathrm{P}(M^c \cap G)$ op "uit 1 een vrouw, uit 2 een man" is $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$. Dus

$$\mathrm{P}(G) = \frac{2}{20} + \frac{9}{20} = \frac{11}{20} \quad \text{en} \quad \mathrm{P}(M \mid G) = \frac{2/20}{11/20} = \frac{2}{11}.$$

3 Voor het uitrekenen van de correlatie hebben we nodig:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}\left(U, U^2\right) &= \mathrm{E}\left[U^3\right] - \mathrm{E}\left[U\right]\mathrm{E}\left[U^2\right], \\
\operatorname{Var}\left(U\right) &= \mathrm{E}\left[U^2\right] - \left(\mathrm{E}\left[U\right]\right)^2 \quad \text{en} \\
\operatorname{Var}\left(U^2\right) &= \mathrm{E}\left[U^4\right] - \left(\mathrm{E}\left[U^2\right]\right)^2.
\end{aligned}$$

Daarom bepalen we

$$\mathrm{E}\left[U^k\right] = \int_0^a u^k \frac{1}{a} du = \frac{a^k}{k+1},$$

waaruit volgt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}\left(U, U^2\right) &= \frac{a^3}{4} - \frac{a}{2}\frac{a^2}{3} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\frac{1}{3}\right) a^3 = \frac{1}{12}a^3, \\
\operatorname{Var}\left(U\right) &= \frac{a^2}{3} - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) a^2 = \frac{1}{12}a^2, \quad \text{en} \\
\operatorname{Var}\left(U^2\right) &= \frac{a^4}{5} - \left(\frac{a^2}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) a^4 = \frac{4}{45}a^4
\end{aligned}$$

Zodoende

$$\rho\left(U, U^2\right) = \frac{\frac{a^3}{12}}{\sqrt{\frac{1}{12}a^2 \cdot \frac{4}{45}a^4}} = \frac{1}{12}\sqrt{135} = \frac{1}{4}\sqrt{15} = 0.968.$$

Een behoorlijk hoge correlatie. Merk op dat het antwoord niet van a afhangt.

4 Als $G(s)$ de kansgegenererende functie is van de X_i's, dan volgt:

$$G_T(s) = [G(s)]^n,$$

omdat de kansgenererende functie van een som van onafhankelijke stochasten het product is van hun kansgenererende functies. Voor G vinden we:

$$G(s) = \mathrm{E}\left[s^X\right] = \mathrm{P}\left(X = 0\right) + s \cdot \mathrm{P}\left(X = 1\right) + s^2 \cdot \mathrm{P}\left(X = 2\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}s + \frac{1}{4}s^2.$$

dus

$$G_T(s) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}s + \frac{1}{4}s^2\right)^n.$$

Nu geldt $G(s) = \frac{1}{4}(1 + 2s + s^2) = \left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2}\right)^2$ en dus

$$G_T(s) = \left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2}\right)^{2n}.$$

Dit is de kansgenererende functie van de $Bin(2n, \frac{1}{2})$-verdeling. Dit is ook te zien via de verdeling van X_i, die is namelijk $Bin(2, \frac{1}{2})$.

5 We bepalen de marginale dichtheid van X en daaruit F_X.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^x \frac{5}{16}x^2 y\,dy = \frac{5}{32}\left[x^2y^2\right]_0^x = \frac{5}{32}x^4,$$

en dit geldt natuurlijk voor $0 < x < 2$. Er volgt direct:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x \leq 0, \\ \frac{1}{32}x^5 & \text{voor } 0 < x < 2, \\ 1 & \text{voor } x \geq 2. \end{cases}$$

6 Als $X = 0$ dan brengt de eerste worp ons geen stap dichterbij en is de situatie vanaf de tweede worp zoals die om te beginnen was, dus

$$\mathrm{E}\left[N|X=0\right] = 1 + v.$$

Als $X = 1$, en de tweede worp is ook 'kop', dan zijn we met 2 worpen klaar. Zo niet, dan zijn we bij de derde worp net zover als aan het begin (maar met 2 gebruikte worpen). Dus

$$\mathrm{E}\left[N|X=1\right] = p \cdot 2 + (1-p)\cdot(2+v) = 2 + (1-p)v.$$

Wegens:

$$\mathrm{E}\left[N\right] = \mathrm{E}\left[N|X=0\right]\cdot \mathrm{P}\left(X=0\right) + \mathrm{E}\left[N|X=1\right]\cdot \mathrm{P}\left(X=1\right)$$

volgt

$$\begin{aligned} v &= (1-p)(v+1) + p(2+(1-p)v) \\ &= (1-p^2)v + 1 + p \end{aligned}$$

en dus

$$v = \frac{1+p}{p^2}.$$

(De controle voor $p = 1$ geeft als antwoord 2, hetgeen klopt.)

7 Wanneer we met e een even, en met o een oneven cijfer aanduiden, dan zijn twee patronen mogelijk: *eoeoe* en *oeoeo*. Voor elke e zijn er 4 keuzes, en voor elke o zijn er 5 mogelijk. Met behulp van de productregel vinden we dan respectievelijk $4^3 5^2$ en $5^3 4^2$ mogelijkheden. Samen $4^2 5^2(4+5) = 3600$.
Het aantal strikt oplopende nummerborden is gelijk aan het aantal manieren waarop je 5 van de 9 cijfers kunt kiezen dus $\binom{9}{5} = 126$.
N.B. Het aantal (*niet* strikt) oplopende nummerborden is gelijk aan het aantal manieren waarop 5 personen in 9 rijen kunnen gaan staan, ofwel het aantal 5-combinaties van $\{1,\ldots,9\}$. Het aantal is dus $D(9,5) = \binom{13}{5} = 1287$.