Technische Universiteit Delft — Mekelweg 4
Fac. der Technische Wiskunde en Informatica — 2628 CD Delft

Tentamen wi1138 Kansrekening
19 augustus 2003, 11.00–12.30 uur

Toelichting. Er wordt verwacht dat je bij elke vraag een uitwerking geeft voorzien van toelichting en motivering. Alleen het antwoord levert niets op. Alle *onderdelen* hebben alle hetzelfde gewicht. Bij dit examen is het gebruik van een rekenmachine en een zogenaamd *cheat-sheet* toegestaan: twee door jezelf op normale wijze beschreven kantjes A4 met materiaal naar keuze, of wat redelijkerwijs als het equivalent daarvan gezien kan worden.

Nieuwe stijl (begonnen september 2002): 1–4.
Oude stijl (begonnen september 2001 of eerder): 1, 2, 3abc, 4a, 5.

1. Een vaas bevat vier ballen, genummerd 1 tot en met 4. We trekken geheel willekeurig één bal uit de vaas. Laat de gebeurtenis A optreden indien bal 1 of bal 4 getrokken wordt. Analoog treedt B op bij 2 of 4, en C bij 3 of 4. Zijn deze gebeurtenissen onafhankelijk? Zijn ze paarsgewijs onafhankelijk? Leg uit.

2. Een slachtoffer van een tasjesroof ziet in 20% van de gevallen het gezicht van de dader. Als de dader is gepakt, wordt hij tussen N andere personen in een zogenaamde 'line-up' gezet. Een slachtoffer dat de dader wel heeft gezien zal de dader zeker aanwijzen, terwijl een slachtoffer dat het gezicht van de dader niet heeft gezien met gelijke kans één van de personen in de line-up aanwijzen. Voor welke N is de conditionele kans dat het slachtoffer het gezicht heeft gezien, gegeven dat het slachtoffer de dader aanwijst tenminste 90%?

3. Men neemt aan dat de verdelingsfunctie F van de trekkracht van een bepaald soort staven (in een geschikt gekozen eenheid) voldoet aan: $F(x) = 0$ voor $x < 0$,
$$F(x) = x^{\theta+1} \quad \text{voor } 0 \leq x \leq 1,$$
en $F(x) = 1$ voor $x > 1$. Hierbij is $\theta > -1$ een parameter.

   a. Bereken de verwachting van de trekkracht.

   b. Stel dat $\theta = 2$. Men kiest nu een willekeurige staaf uit de partij en onderzoekt of de trekkracht van de staaf groter is dan 0.75. Als dat niet zo is, kiezen we opnieuw een willekeurige staaf uit de partij en gaan net zolang door tot we een staaf hebben met een trekkracht groter dan 0.75. Wat is de verdeling en de verwachting van het aantal staven dat onderzocht moet worden?

   c. Voor welke waarden van θ is de kans dat 3 of meer staven onderzocht moeten hoogstens gelijk aan 0.40?

d. **(Alleen nieuwe stijl!)** Leg uit hoe men bij een gegeven waarde van θ waarnemingen kan genereren uit de kansverdeling van de trekkracht.

4. De simultane dichtheid van het paar stochasten (X, Y) wordt gegeven door

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y & \text{voor } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

a. Bepaal $\mathrm{P}(Y > 2X)$.

b. **(Alleen nieuwe stijl!)** Bepaal de voorwaardelijke verwachting van Y gegeven $X = x$.

5. **(Alleen oude stijl!)**

a. Laten $A(s)$ en $B(s)$ de genererende functies zijn van respectievelijk (a_n) en (b_n). Beschouw $C(s) = A(s)B(s)$. Laat zien dat $C(s)$ de genererende functie is van de rij (c_n) gegeven door:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad n \geq 0.$$

b. Laat zien dat voor binomiaalcoëfficienten de volgende identiteit geldt voor niet-negatieve n, m en k met $k \leq n + m$:

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} \binom{n}{k-j}.$$

Uitwerkingen

1 $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(C) = \frac{1}{2}$ en $A \cap B = B \cap C = C \cap A = \{4\}$. Dus $\frac{1}{4} = \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$. Evenzo voor $B \cap C$ en $C \cap A$. Dit toont aan dat ze paarsgewijs onafhankelijk zijn. Omdat $A \cap B \cap C = \{4\}$ geldt niet $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B) \times \mathrm{P}(C)$. De drie gebeurtenissen zijn dus niet onafhankelijk.

2 Voer in de gebeurtenissen G 'slachtoffer ziet gezicht', W 'slachtoffer wijst dader in line-up aan'. De gegevens vertalen zich in $\mathrm{P}(G) = 0.2$, $\mathrm{P}(W \,|\, G) = 1$ en $\mathrm{P}(W \,|\, G^c) = 1/(N+1)$. De vraag vertaalt zich in: voor welke N geldt $\mathrm{P}(G \,|\, W) \geq 0.9$? Door conditioneren vinden we: $\mathrm{P}(W) = 1 \times 0.2 + \frac{1}{N+1} \times 0.8$. Door toepassing van de regel van Bayes vinden we:

$$\mathrm{P}(G \,|\, W) = \frac{\mathrm{P}(W \cap G)}{\mathrm{P}(W)} = \frac{1}{1 + \frac{4}{N+1}}.$$

Na een paar stappen rekenen vinden we dat $N \geq 35$ moet gelden.

3a De dichtheid van de trekkracht is $f(x) = (\theta+1)x^{\theta}$. Dus de verwachting is $(\theta+1)/(\theta+2)$.

3b De kans op een staaf met trekkracht groter dan 0.75 is gelijk aan $1 - F(0.75) = 1 - (3/4)^3 = 37/64 \approx 0.5781$. Het aantal staven dat onderzocht moet worden heeft een *Geo*(37/64)-verdeling, dus de verwachtingswaarde is $64/37 \approx 1.730$.

3c De kans dat 3 of meer staven onderzocht moeten worden is gelijk aan $F(0.75)^2 = 0.75^{2(1+\theta)}$. Dus $\theta \geq \ln(0.4)/(2 \times \ln(0.75)) - 1 = 0.593$.

3d Los X op uit $F(X) = U$ met U een $U(0,1)$-stochast. Oplossen van $F(X) = U$ geeft $X = U^{1/(\theta+1)}$.

4a

$$\mathrm{P}(Y > 2X) = \int_{x=0}^{1/2} \int_{y=2x}^{1} f(x,y)\, dy dx = \tfrac{17}{96}.$$

4b Om de conditionele dichtheid te bepalen hebben we de marginale verdeling van X nodig, de dichtheid is $f_X(x) = \frac{5}{4}x + \frac{3}{8}$ voor $0 \leq x \leq 1$ en $f_X(x) = 0$ voor andere waarden van x. Dan volgt voor $0 \leq y \leq 1$:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y}{\frac{5}{4}x + \frac{3}{8}}.$$

De conditionele verwachting bepalen we dan als volgt:

$$\mathbf{E}(Y \,|\, X = x) = \int_0^1 y \, \frac{\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y}{\frac{5}{4}x + \frac{3}{8}}\, dy = \ldots = \frac{5x+2}{10x+3}.$$