Tentamen Kansrekening en Statistiek 1
8 juni 2006, 10-13h

- Het tentamen is “open boek”, d.w.z. boek, collegenota’s, tabellen, grafische rekenmachine etc. mogen gebruikt worden.
- Motiveer steeds uw antwoord, maar probeer de vragen kort en overzichtelijk te beantwoorden.
- Er zijn 5 vragen met elk vier onderdelen. Voor elk onderdeel kunnen maximaal twee punten verdiend worden.

---

1. Twee personen A en B spelen het volgende spel. A werpt een dobbelsteen en wint als de worp een zes is. Zo niet, dan geeft A de dobbelsteen aan B, die wint als hij een zes werpt, zo niet geeft hij de dobbelsteen terug aan A, enzoverder.

   a) Noem T het totale aantal worpen voor één van beide personen (A of B) het spel wint. Welke verdeling heeft T (specificeer ook de parameter(s)) ?

   b) Toon aan dat A wint met kans 6/11.

   c) We spelen het spel nu zoveel keer totdat B een keer gewonnen heeft. Het aantal keer dat we daarvoor moeten spelen noemen we N. Bereken de verwachting en de variantie van N.

   d) We spelen het spel nu tien keer. Bereken de kans dat B minstens twee maal wint.

2. We beschouwen $X_1, \ldots, X_n$ onafhankelijke exponentieel verdeelde stochasten met parameter λ.

   a) Toon aan dat
   $$Y_n := \min_{i=1}^{n}(X_i)$$
   exponentieel verdeeld is met parameter $n\lambda$

   b) Toon aan (m.b.v. onderdeel a)) dat voor iedere $0 < \alpha < 1$, $n^\alpha Y_n$ in kans naar nul convergeert als $n \to \infty$ (hint: gebruik onderdeel a) voor de berekening van de kans $P(n^\alpha Y_n > \epsilon)$)

   c) We beschouwen nu het maximum
   $$M_n = \max_{i=1}^{n}(X_i)$$
   Toon aan dat voor alle $x \in \mathbb{R}$
   $$\lim_{n\to\infty} P\left(M_n - \frac{\log n}{\lambda} \le \frac{x}{\lambda}\right) = e^{-e^{-x}}$$

d) Toon aan dat $\frac{M_n}{n}$ in kans naar nul convergeert als $n \to \infty$

3. We beschouwen $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. geometrisch verdeeld met succeskans p.

   a) Toon aan dat de maximum likelihood schatter voor de succeskans p gegeven wordt door
   $$\hat{p} = \frac{1}{\overline{X}}$$
   met
   $$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

   b) Is deze schatter zuiver ?

   c) Wat is de maximum likelihood schatter voor $1/p$?

   d) Toon aan dat de schatter in onderdeel c) zuiver is en bereken zijn gemiddelde kwadratische fout.

4. Gegeven is een 95% betrouwbaarheidsinterval $[10, 20]$ voor de verwachting μ van een normale verdeling (variantie σ^2 bekend). Het aantal metingen in de steekproef bedraagt 10.

   a) Moet de hypothese $H_0 : \mu = 11$ met alternatief $H_1 : \mu \neq 11$ verworpen worden ($\alpha = 0.05$) ?

   b) Geef het corresponderende 90% links eenzijdig betrouwbaarheidsinterval

   c) Een nieuwe steekproef met 10 metingen wordt genomen, en het nieuwe 95% betrouwbaarheidsinterval is $[11, 21]$ (σ^2 is onveranderd). Is de verwachting dezelfde gebleven ? (toets bij $\alpha = 0.05$).

   d) Geef een 90% tweezijdig betrouwbaarheidsinterval voor het verschil in verwachting gebaseerd op deze twee steekproeven.

5. Zijn de volgende uitspraken juist of fout. Argumenteer (bondig).

   a) A en B zijn gebeurtenissen (met kans niet gelijk aan nul of 1) zodanig dat
   $$P(A|B) = P(A|B^c)$$
   dan geldt: A en B zijn onafhankelijk.

   b) Er bestaat een positieve stochast X waarvoor $E(X) = 1$, $V(X) = 1$ en $E(1/X) = 1$.

   c) De P-waarde voor een Z-toets met eenzijdig alternatief is gelijk aan 0.02. Dan moet dezelfde nulhypothese verworpen worden indien het alternatief tweezijdig is, en $\alpha = 0.05$.

   d) Bij een analyse van het verband tussen druk en temperatuur in een gasmengsel worden 20 metingen uitgevoerd. Men gaat uit van een lineair model. De T-verdeelde toetsingsgrootheid voor de helling is gelijk aan 2.1. Dit betekent dat we met 95% betrouwbaarheid kunnen stellen dat er een significant en stijgend verband bestaat tussen druk en temperatuur.