Tentamen Kansrekening en Statistiek 1
14 augustus 2006, 10-13h

- Het tentamen is “open boek”, i.e., boek, collegenota’s, tabellen, grafische rekenmachine etc. mogen gebruikt worden.
- Motiveer steeds uw antwoord, maar probeer de vragen kort en overzichtelijk te beantwoorden.
- Er zijn 5 vragen met in totaal 20 onderdelen. Voor elk onderdeel kunnen hoogstens 2 punten verdiend worden.

---

1. De positie van een stochastische wandelaar na n stappen wordt gegeven door $S_0 = 0$ en
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i$$
voor $n = 1, 2, \ldots$, met ϵ_i i.i.d. stochasten waarvoor $\mathbb{P}(\epsilon_i = 1) = \mathbb{P}(\epsilon_i = -1) = 1/2$.

   a) Welke waarden kan S_{10} aannemen ?
   b) Bereken de kans dat $S_{10} = 0$.
   c) Bereken de verwachting en de variantie van S_n.
   d) Toon aan dat voor iedere $\delta > 0$,
   $$\frac{S_n}{n^{\frac{1}{2}+\delta}}$$
   in kans naar nul convergeert als $n \to \infty$.
   e) Benader met behulp van de centrale limietstelling de kans dat de wandelaar na 10000 stappen meer dan 200 eenheden van zijn vertrekpunt verwijderd is.

2. Een tweedimensionale stochast (X, Y) heeft de volgende gemeenschappelijke kansdichtheid
$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} ye^{-x} \text{ voor } 0 \leq y \leq x < \infty \\ 0 \text{ elders} \end{cases} \tag{0.1}$$

   a) Toon aan dat f gegeven door (0.1) wel degelijk een kansdichtheid definieert.
   b) Bereken de marginale kansdichtheid van X.
   c) Toon aan dat X en Y niet onafhankelijk zijn.
   d) Bereken de conditionele kansdichtheid van X, gegeven dat $Y = 1$.

e) Bereken de verwachting van $X - Y$.

3. De afstand tussen deeltjes met een sterk afstotende interactie op korte afstand en aantrekkende interactie op langere afstand kan worden gemodelleerd door een stochast X met kansdichtheid

$$f(x|\theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} \text{ voor } x \geq \theta \\ 0 \text{ elders} \end{cases} \tag{0.2}$$

Hierbij stelt θ de minimale afstand voor tussen de deeltjes.

a) Toon aan dat

$$\hat{\theta} = \min_{i=1}^{n}(X_i)$$

de maximum likelihood schatter is gebaseerd op een i.i.d. steekproef $X_1, X_2, \ldots, X_n$ met kansdichtheid (0.2).

b) Bereken de gemiddelde kwadratische fout van de schatter uit onderdeel a). U mag hierbij gebruiken dat de kansdichtheid van $\hat{\theta}$ gegeven wordt door

$$f_{\hat{\theta}}(x) = \begin{cases} ne^{-n(x-\theta)} \text{ voor } x \geq \theta \\ 0 \text{ elders} \end{cases}$$

c) Een alternatieve schatter voor θ is

$$\hat{\theta}_2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - 1$$

Toon aan dat deze schatter zuiver is.

d) Vergelijk de schatters uit onderdeel a) en c) en argumenteer welke schatter de beste is.

4. We willen de verwachting schatten van een normale verdeling met onbekende verwachting en variantie. Er wordt een steekproef van $n = 10$ waarnemingen uitgevoerd. De relevante statistische grootheden zijn, $\overline{X} = 10.05$, $S^2 = 0.06$.

a) Stel een 95% betrouwbaarheidsinterval op voor de onbekende verwachting op basis van deze gegevens.

b) Moeten we de hypothese $\mu = 10$ met alternatief $\mu < 10$ verwerpen bij $\alpha = 0.1$?

c) Indien **bekend** is dat $\sigma = 0.2$, wat is dan de P-waarde voor de toets $\mu = 10$ met alternatief $\mu > 10$?

5. Zijn de volgende uitspraken juist of fout ? Argumenteer (bondig).

a) Bij een Z-toets voor de verwachting van een normale verdeling is de fout van de eerste soort gelijk aan α. De fout van de tweede soort is dan hoogstens $1 - \alpha$.

b) X en Y zijn uniform verdeeld op het interval $[0, 1]$ en onafhankelijk. Dan is de som $X + Y$ uniform verdeeld op het interval $[0, 2]$.

c) A en B zijn onafhankelijke gebeurtenissen met $P(A) = P(B)$, en $P(A \cup B) = 1$. Dan geldt $P(A) = P(B) = 1$.