Tentamen KS1 juni 2008

Open boek tentamen

Opgave 1

Stel dat gebeurtenissen A en B disjunkt zijn, dus $A \cap B = \emptyset$; stel dat gebeurtenis C onafhankelijk is van A; en stel dat C is ook onafhankelijk van B.
a) Bewijs dat C onafhankelijk is van $(A \cup B)^c$.
b) Gegeven dat $\mathrm{P}(A) = 0.4$, $\mathrm{P}(B) = 0.3$ en $\mathrm{P}(C) = 0.2$, bereken $\mathrm{P}(A \cup B \cup C)$.

Opgave 2

X heeft kansdichtheid $f(x) = c(2x - x^2)$, $0 \leq x \leq 2$, $f(x) = 0$ elders.
a) Laat zien dat $c = 3/4$.
b) Bereken $\mathrm{P}(0.5 < X < 1)$.
c) Bereken $\mathrm{E}(3X + 4)$.

Opgave 3

Ik kies tweemaal “at random” een groep van drie studenten uit een klas van 12. De twee selecties worden geheel onafhankelijk van elkaar gedaan: bij de tweede selectie kies ik nogmaals uit alle 12 studenten.
a) Wat is de kans dat precies één student in beide groepen zit?
b) Stel nu dat de klas totaal n studenten bevat, en dat de twee selecties k_1 en k_2 studenten bevatten. Wat zijn verwachting en variantie van het aantal studenten die tegelijkertijd in de beide selecties zitten?

Opgave 4

Stel X een is discreet verdeelde random variabele en $Y = g(X)$ is een transformatie van X.
a) Is het mogelijk dat X en Y onafhankelijk van elkaar zijn (en zo ja, hoe?)
b) Is het mogelijk dat X en Y ongecorreleerd zijn, maar niet onafhankelijk?

Opgave 5

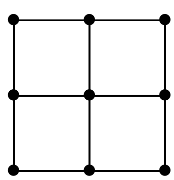
Ik kies een getal X uit de exponentiele verdeling met parameter 1. Vervolgens, gegeven $X = x$, trek ik een getal N uit de Poisson verdeling met parameter x.
a) Bereken $\mathrm{E}(N)$ en $\mathrm{var}(N)$ zo direct mogelijk, dat wil zeggen, zonder de onvoorwaardelijke verdeling van N te bepalen.
b) Laat zien dat $\mathrm{P}(N = n) = 2^{-n-1}$, $n = 0, 1, \ldots$.
c) Wat is de conditionele verdeling van X gegeven $N = n$?

Opgave 6

Stel $X_1, \ldots, X_n$ onafhankelijk en uniform verdeeld zijn op het interval $[0, a]$.
a) Bereken de kansverdeling van $T_n = n\big(a - \max_{i=1,\ldots,n} X_i\big)$.
b) Bewijs dat voor $n \to \infty$, T_n in verdeling convergeert naar de exponentiele verdeling met parameter $1/a$.

Opgave 7

Een deeltje doet een "random walk" op de 3×3 rooster in onderstaand figuur. In elke stap, onafhankelijk van wat eerder is gebeurt, springt het deeltje met gelijke kansen van zijn huidige positie naar een van de aangrenzende roosterpunten. Het deeltje begint op tijdstip 0 op een random (uniform verdeelde) roosterpunt.



a) Wat kan je over de toestanden vertellen (communicerende klassen; periodiek of aperiodiek; nul of positief recurrent of transient)?
b) Wat is de kans dat na drie stappen, het deeltje zich in het middelpunt bevindt?
c) Ik onderscheid drie soorten punten in het grafiek: het middelpunt; de vier hoekpunten; en de middelpunten van de vier zijkanten. Stel dat we van het deeltje op elk moment alleen noteren in welk *soort* punt het zich bevindt. Leg uit waarom dat ook een Markov keten is, maar nu met alleen drie toestanden. Wat is de stationaire verdeling van deze "gereduceerde" keten? Wat is de stationaire verdeling van het oorspronkelijke proces? Wat kan je zeggen over de positie van het deelje na heel veel stappen?