Tentamen Kansrekening en Statistiek 2

vrijdag 14 januari 2005, 10.00-13.00 uur

Er zijn 5 opgaven.
Tabellen: de χ^2- (chi-kwadraat-) en Student-verdeling.

Opgave 1.
Laat $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef ziijn uit een verdeling met dichtheid

$$f_X(x) = \frac{\lambda}{(1+x)^{1+\lambda}}, \ x > 0.$$

Hier is $\lambda > 0$ een parameter.
a) Beschrijf de Neyman Pearson toets voor de nulhypothese $H_0: \ \lambda = 1$ tegen het alternatief $H_1 : \lambda = 2$.
b) Laat zien dat de dichtheid f_Y van $Y_1 = \log(1 + X_1)$ gegeven wordt door

$$f_Y(y) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda y}, \ y > 0,$$

d.w.z., Y_1 is exponentieel verdeeld met parameter λ.
c) De volgende waarden voor $X_1, \ldots, X_n$ zijn gevonden ($n = 20$):

```
x =
    0.122
    0.022
    0.383
    0.066
    1.404
    0.010
    0.919
    0.991
    0.069
    0.167
    1.707
    8.223
    0.058
    1.241
    0.830
    0.230
    0.875
    0.460
    2.929
    0.006
```

Er geldt dus $\sum_{i=1}^n \log(1 + X_i) = 10.206$. Benader m.b.v. de χ^2-tabel de p-waaarde van de toets. Gebruik hierbij dat als $Z_1, \ldots, Z_n$ onderling onafhankelijk en exponentieel verdeeld zijn met parameter $\lambda = 1$ dan bezit $2\sum_{i=1}^n Z_i$ een χ^2-verdeling met $2n$ vrijheidsgraden.
d) Neem onbetrouwbaarheid $\alpha = 0.05$. Wordt de nulhypothese verworpen?

Opgave 2.
Beschouw twee onderling onafhankelijke steekproeven $Y_{1,1}, \ldots, Y_{1,n}$ en $Y_{2,1}, \ldots, Y_{2,m}$. We veronderstellen dat de eerste steekproef is getrokken uit een normale verdeling met verwachting μ_1 en variantie σ^2 ($\mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$-verdeling), en dat de tweede steekproef is getrokken uit een normale verdeling met verwachting μ_2 en dezelfde variantie σ^2 ($\mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$-verdeling). Hierbij zijn μ_1, μ_2 en σ^2 onbekende parameters. Noem nu

$$Y_i = \begin{cases} Y_{1,i} & i = 1, \ldots, n \\ Y_{2,i-n} & i = n+1, \ldots, n+m \end{cases},$$

en

$$x_i = \begin{cases} +1 & i = 1, \ldots, n \\ -1 & i = n+1, \ldots, n+m \end{cases}.$$

a) Ga na dat het volgende lineaire model geldt:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + U_i, \ i = 1, \ldots, n+m,$$

met $U_1, \ldots, U_{n+m}$ onderling onafhankelijk en $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$-verdeeld. Schrijf β_0 en β_1 als functie van μ_1 en μ_2.
b) Bepaal de kleinste-kwadratenschatters van β_0 en β_1.
c) Stel dat $n = 3$, $m = 4$ en dat de waargenomen waarden zijn $(Y_{1,1}, \ldots, Y_{1,3}) = (3, 6, 6)$ en $(Y_{2,1}, \ldots, Y_{2,4}) = (7, 6, 8, 7)$. Bepaal een 95 % betrouwbaarheidsinterval voor β_1.

Opgave 3.
We beschouwen een steekproef $X_1, \ldots, X_n$ uit een verdeling met dichtheid f en gebruiken de kernschatter

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} K(\frac{t - X_i}{h}), \ t \in \mathbf{R},$$

waarbij K een kernel is en h de bandbreedte. Bepaal $E\hat{f}(t)$ in het geval dat $f = K = \phi$, met

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}, \ x \in \mathbf{R},$$

de dichtheid van de standaard normale verdeling.

Opgave 4.
Laat X een stochastische grootheid zijn met dichtheid $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}, \ x > 0$.
a) Bepaal de moment-genererende functie van X.
b) Gebruik a) voor het berekenen van EX en EX^2.
c) Stel dat $E(Y|X = x) = x/2$ voor alle $x > 0$. Bereken nu EY en $E(XY)$.

Opgave 5. We bekijken 3 merken frisdrank, zeg merk 1, 2 en 3. Laat X_n het merk frisdrank zijn dat je kiest op dag n, $n = 0, 1, 2, \ldots$. We veronderstellen het Markov-model

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{i,j}, \ i, j \in \{1, 2, 3\},$$

met

$$(p_{i,j}) = \begin{pmatrix} .50 & .25 & .25 \\ .40 & .20 & .40 \\ .60 & .40 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Is de Markov-keten reducibel? Motiveer je antwoord.
b) Bereken de kans dat je op donderdag merk 3 kiest, als je op de maandag daarvoor ook merk 3 hebt gekozen.