TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 1A

maandag 16 december 2002, 10.00-12.00.

Coördinaten zijn gegeven t.o.v. een standaardbasis in $\mathbf{R}^n$.

1. De matrix A en de vector $b \in \mathbf{R}^4$ zijn gegeven door

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

a. Los de vergelijking $Ax = b$ op voor $x \in \mathbf{R}^5$.

b. Bepaal een basis voor de rijruimte en voor de kolomruimte van A.

2. Voor de lineaire afbeelding $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ geldt:

$$T(1,2,0) = (5,-2,3), \quad T(0,1,2) = (3,5,-2), \quad T(2,0,1) = (-2,3,5).$$

Ga na of T inverteerbaar is. (Het is niet nodig de matrix van T^{-1}, indien deze bestaat, te berekenen.)

3. $V \subset \mathbf{R}^4$ is het 2-vlak door de punten $A(1,-1,2,-3)$, $B(2,2,-2,0)$ en $C(1,4,-4,2)$, en W is de lineaire deelruimte die parallel is met V.

a. Bepaal een parametervoorstelling voor V.

b. Bepaal een minimaal stelsel vergelijkingen voor $W^\perp$.

b. Bepaal de coördinaten van het snijpunt van V met $W^\perp$.

4. Beschouw de afbeelding $S : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gegeven door $S(x_1, x_2) = (x_1, \lambda x_2)$ met $\lambda \in \mathbf{R}$. Meetkundig stelt deze afbeelding een (lijn)vermenigvuldiging t.o.v. de lijn $x_2 = 0$ in $\mathbf{R}^2$ voor.

a. Bewijs dat S een lineaire afbeelding is.

Analoog kunnen we lijnvermenigvuldiging t.o.v. een andere lijn door de oorsprong definiëren. Zij ℓ de lijn in $\mathbf{R}^2$ met vergelijking $2x_1 + x_2 = 0$ en $S_{\ell,-2} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ de lijnvermenigvuldiging t.o.v. de lijn ℓ met een factor -2. $S_{\ell,-2}$ is een lineaire afbeelding.

b. Bepaal de matrix van $S_{\ell,-2}$ t.o.v. de standaardbasis.

5a. Ga na of er een 3×3-matrix A bestaat zodat $\text{rang}(A) = 2$ en $\text{rang}(A^2) = 1$.

b. Ga na of er een 3×3-matrix A bestaat zodat $\text{rang}(A) = 2$ en $A^2 = 0$.

LINEAIRE ALGEBRA 1A; 16 december 2002. Antwoorden.

1a. Een mogelijke rijtrapvorm is:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right).$$

De oplossingsverzameling is $\text{span}\{(1,0,1,-1,0),(-1,-1,1,0,2)\} + (0,0,1,0,-1)$.

b. Een basis voor de rijruimte is $\{(1,0,1,2,0),(0,1,3,3,-1),(0,0,2,2,-1)\}$.
Een basis voor de kolomruimte wordt gegeven door de eerste drie kolomvectoren van A.

2. T is inverteerbaar precies indien de rang van T gelijk is aan 3. Het is dus voldoende om na te gaan dat de matrix van de beeldvectoren inverteerbaar is:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Dit is in te zien door de matrix in rijtrapvorm te brengen. Uiteraard kan ook eerst de matrix van T worden bepaald en vervolgens kan hiervan de rang worden bepaald. De matrix van T t.o.v. de standaardbasis is:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3a. Een p.v. voor V is bijvoorbeeld

$$\text{span}\{(1,-2,2,-2),(1,3,-4,3)\} + (2,2,-2,0).$$

b. Een minimaal stelsel vergelijkingen voor $W^\perp$ is dus:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

c. Het snijpunt vinden we door de p.v. van V in te vullen in het stelsel vergelijkingen van $W^\perp$: dit geeft het stelsel vergelijkingen $\begin{cases} 13t - 19u = 6 \\ -19t + 35u = -16 \end{cases}$, waarvan de oplossing is $t = u = -1$. Het snijpunt is $(0,1,0,-1)$.

4a. Laten zien dat $T(u+v) = T(u)+T(v)$ en $T(\lambda u) = \lambda T(u)$ voor $u, v \in \mathbf{R}^2$ en $\lambda \in \mathbf{R}$.

b. $S' := S_{\ell,-2}$ is bepaald door de beelden van twee basisvectoren: $S'(1,-2) = (1,-2)$ en $S'(2,1) = (-4,-2)$. De matrix van S' is dan

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -7/5 & -6/5 \\ -6/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

5a. Een voorbeeld van zo'n matrix is $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Zo'n matrix bestaat niet: uit $A^2 = 0$ volgt dat $A(\mathbf{R}^3) \subset$Ker(A). Echter dim $A(\mathbf{R}^3) = \text{rang}(A) = 2$ en dim(Ker(A))=3-rang(A)=1, en dit geeft een tegenspraak (immers uit $W \subset V$ volgt $\dim(W) \leq \dim(V)$ voor lineaire deelruimten V, W).

TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 1A

dinsdag 28 januari 2003, 14.00-16.00.

Coördinaten zijn gegeven t.o.v. een standaardbasis in $\mathbf{R}^n$.

1. De matrix A en de vector $b \in \mathbf{R}^4$ zijn gegeven door

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

a. Los de vergelijking $Ax = b$ op voor $x \in \mathbf{R}^5$.

b. Heeft de matrix A een links- of een rechtsinverse? Verklaar je antwoord.

2. $V \subset \mathbf{R}^4$ is het 2-vlak door de punten $A(2, -1, -1, 3)$, $B(0, 1, -1, 1)$ en $C(-1, 3, -2, 0)$.

a. Bepaal een parametervoorstelling van V.

b. Bepaal een minimaal stelsel vergelijkingen voor V.

3a. Bepaal voor alle $a \in \mathbf{R}$ de rang van de matrix

$$D_a = \begin{pmatrix} 1 & -a & -3 \\ a & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. Bereken de inverse matrix van D_0.

4. Gegeven zijn in $\mathbf{R}^2$ de lijnen $\ell : 3x_1 + x_2 = 0$ en $m : 2x_1 - x_2 = 0$. $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ is de projectie op ℓ langs m, m.a.w. het beeld $T(P)$ van een punt P wordt verkregen door de lijn m' door P en evenwijdig aan m te snijden met ℓ. T is een lineaire afbeelding.

Bepaal de matrix van T t.o.v. de standaardbasis.

5. A is een $m \times n$-matrix en B een $n \times n$-matrix.

a. Bewijs dat $\text{rang}(AB) \leq \text{rang}(A)$.

b. Geef een voorbeeld van matrices A, B zodat B niet de nulmatrix is en $\text{rang}(AB) < \text{rang}(A)$.

c. Laat zien dat voor B inverteerbaar geldt: $\text{rang}(AB) = \text{rang}(A)$.

Antwoorden van het tentamen van 28 januari 2003:

1a. $u(1,-1,1,-1,1)+(-2,-1,0,1,2)$.

b. rang is 4 dus er is een rechtsinverse.

2a. $s(1,-1,0,1)+t(1,-2,1,1)+(0,1,-1,1)$.

b. $x_1+x_2+x_3=0$, $x_4-x_1=1$.

3. $\text{rang}(D_a)=3$, behalve voor $a=1$; dan is de rang 2.

b. $D_0^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $T=\begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ -6/5 & 3/5 \end{pmatrix}$.

5a. Als $b_1,\ldots,b_n$ de kolomvectoren van B zijn dan is de rang van AB de dimensie van $\text{span}\{Ab_1,\ldots,Ab_n\}$. Deze lineaire deelruimte ligt in $A(\mathbf{R}^n)$ dus de dimensie is kleiner dan de rang van A. Anders: $B(\mathbf{R}^n)\subset\mathbf{R}^n$ dus $A(B(\mathbf{R}^n))\subset A(\mathbf{R}^n)$, en dus

$$\text{rang}(AB)=\dim\ A(B(\mathbf{R}^n))\leq\dim\ A(\mathbf{R}^n)\ =\ \text{rang}(A).$$

b. Bijvoorbeeld $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c. Volgens (a) geldt: $\text{rang}(A)=\text{rang}(ABB^{-1})\leq\text{rang}(AB)\leq\text{rang}(A)$.
Dus geldt in de bovenstaande regel overal gelijkheid.

TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 1B

donderdag 3 april 2003, 9.00-11.00.

---

1. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

a. Laat zien dat het karakteristieke polynoom $\chi_A(X)$ van A gelijk is aan $-X^3 + 9X^2 - 23X + 15$.

b. Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A.

c. Bepaal een inverteerbare matrix C en een diagonaalmatrix D zodat $A = CDC^{-1}$.

d. Toon aan, m.b.v. (c), dat $\chi_A(A) = -A^3 + 9A^2 - 23A + 15 = 0$.

2. Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y''(t) + 6y'(t) + 13y(t) = 0 \qquad (*)$$

voor $t \in \mathbf{R}$.

a. Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking. Geef de oplossing als een lineaire combinatie van reële functies.

b. Bepaal de oplossing $y(t)$ van de differentiaalvergelijking $(*)$ waarvoor geldt: $y(0) = 1$ en $y'(0) = -2$.

3a. Bepaal de oplossing $(y(t), z(t))$ van het volgende stelsel eerste-orde-differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = 2y(t) + z(t) \end{cases}$$

zodat $y(0) = z(0) = 1$.

4. Bepaal in $\mathbf{R}^5$ de afstand tussen de lijn $\ell = \text{span}\{(1,1,1,0,0)\}$ en het 3-vlak V gegeven door de vergelijkingen $\begin{cases} x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_5 = 1 \end{cases}$.

5. Bewijs dat voor $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ geldt dat

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right).$$

TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 1A

donderdag 28 augustus 2003, 10.00-12.00.

---

1. Los het volgende stelsel lineaire vergelijkingen op:

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & -\ x_2 & +2x_3 & & = & -2 \\ -x_1 & & +2x_3 & -\ x_4 & = & -7 \\ & x_2 & -6x_3 & +3x_4 & = & 18 \\ x_1 & +\ x_2 & -8x_3 & +3x_4 & = & 23 \end{array}$$

2. Gegeven zijn de 4×4-matrices

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

a. Bereken voor alle $a, b \in \mathbf{R}$ de rang van $M_{a,b}$.

b. Bereken de matrix $(M_{0,3})^{-18}$.

3a. In $\mathbf{R}^3$ zijn gegeven de lijn $\ell : \begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$ en het vlak $V : x_1 - 5x_2 + x_3 = 4$. W is het vlak door de oorsprong dat evenwijdig is aan ℓ en loodrecht staat op V.

Bepaal een vergelijking voor W.

b. Bepaal een vergelijking van het hypervlak in $\mathbf{R}^5$ door de punten $(1, 1, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 0, -1, 1)$, $(0, 1, 1, -1, 1)$, $(3, -2, 1, -1, 1)$ en $(-1, 2, -1, -1, 3)$.

4. $S : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ is de (loodrechte) spiegeling in de lijn $\ell : 4x_1 + x_2 = 0$ in $\mathbf{R}^2$. Bepaal de matrix van S t.o.v. de standaardbasis.

TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 1B

donderdag 28 augustus 2003, 14.00-16.00.

---

1. Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Laat zien dat het karakteristieke polynoom van A gelijk is aan $-X^3+2X^2+X-2$.

b. Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van A.

c. Bepaal een matrix F en een diagonaalmatrix D zodat $FAF^{-1} = D$.

d. Bereken A^{15}.

2. Bepaal de oplossing van het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} y'(t) = 5y(t) - 2z(t) \\ z'(t) = -y(t) + 4z(t) \end{cases}$$

zodat $y(0) = 2,\ z(0) = 5$.

3. Gegeven zijn twee lineair onafhankelijke vectoren $a, b \in \mathbf{R}^3$, en de afbeelding $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ gegeven door $T(x) = (x,b)a - (x,a)b$ waarbij $(\ ,\ )$ het standaard-inwendig produkt is op $\mathbf{R}^3$.

a. Toon aan dat T een lineaire afbeelding is.

b. Bepaal de nulruimte van T.

c. Laat zien dat T geen andere (reële) eigenwaarden heeft dan 0.

d. Is T diagonalizeerbaar? Verklaar je antwoord.

4. Gegeven is de $n \times n$ determinant

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

(er staan enen op de diagonalen direkt onder en boven de hoofddiagonaal).
Bewijs dat $D_{2n} = (-1)^n$ en $D_{2n-1} = 0$ voor $n \in \mathbf{N}$.

2. De lineaire afbeelding $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ is gegeven door $T(2,1,1) = (3,5,4)$, $T(0,1,-1) = (1,1,4)$ en $T(1,0,3) = (1,4,-2)$.

   Bereken de matrix van T t.o.v. de standaardbasis in $\mathbf{R}^3$.

TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 1B

maandag 16 juni 2003, 10.10-12.10.

---

1. Gegeven is de matrix
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a. Laat zien dat het karakteristieke polynoom $\chi_A(X)$ van A gelijk is aan $-X^3 + 6X^2 - 11X + 6$.

b. Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A.

c. Bepaal een inverteerbare matrix C en een diagonaalmatrix D zodat $A = CDC^{-1}$.

d. Toon aan, m.b.v. (c), dat $\chi_A(A) = -A^3 + 6A^2 - 11A + 6 = 0$.

2. Los m.b.v. de regel van Cramer het volgende stelsel vergelijkingen op:
$$\begin{cases} 14x_1 - 9x_2 = 20 \\ -8x_1 + 11x_2 = -13. \end{cases}$$

3. Bepaal de oplossing van het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen:
$$\begin{cases} y'(t) = 3y(t) - 4z(t) \\ z'(t) = -3y(t) - z(t) \end{cases}$$
zodat $y(0) = 2,\ z(0) = -1$.

4. In $\mathbf{R}^5$ zijn de 2-vlakken V en W gegeven door
$$V : \left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{array} \right\}, \qquad W : \left\{ \begin{array}{c} x_1 = 1 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

a. Toon aan dat V en W geen gemeenschappelijke richtingsvector hebben.

b. Bepaal de afstand tussen V en W.

5. Laat $\mathbf{a}$ en $\mathbf{n}$ vectoren in $\mathbf{R}^3$ zijn met $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{n}\| = 1$ en $< \mathbf{a}, \mathbf{n} >= 1/2$ (hierbij stelt $< , >$ het standaard-inproduct in $\mathbf{R}^3$ voor). De lineaire afbeelding $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ wordt gegeven door $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 4 < \mathbf{x}, \mathbf{n} > \mathbf{a}$.

a. Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van T.

b. Ga na of T diagonalizeerbaar is.