TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 1

18 december 2003, 10.00-13.00.

Laat bij elke opgave duidelijk zien hoe je aan het antwoord komt. Het geven van alleen de uitkomst is niet voldoende.

1. Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ en de vector $\mathbf{b}_c = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ c \\ 15 \end{pmatrix}$.

a. Voor welke $c \in \mathbf{R}$ zit de vector $\mathbf{b}_c$ in de kolomruimte van A? (7 pt)

b. Los het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_0$ op. (4 pt)

2. Bepaal in $\mathbf{R}^3$ de afstand tussen het punt $P(1, 2, -1)$ en het vlak $V = \text{span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. (7 pt)

3. Beschouw de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -6 & 12 \\ -2 & 4 & -8 \end{pmatrix}$.

a. Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A. (8 pt)

b. Bepaal een inverteerbare matrix U en een diagonaalmatrix D zodat $A = UDU^{-1}$. (3 pt)

c. Bereken A^{15}. (5 pt)

4. In $\mathbf{R}^4$ is de lineaire deelruimte W gegeven door $W = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

a. Bepaal een basis van $W^{\perp}$. (2 pt)

b. Bepaal een orthonormale basis van $W^{\perp}$. (4 pt)

c. Laat $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Schrijf $\mathbf{v}$ als $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}^{\perp}$ met $\mathbf{w} \in W$ en $\mathbf{w}^{\perp} \in W^{\perp}$. (4 pt)

Op de achterzijde van dit blad staat de rest van de opgaven.

5. De (lineaire) afbeelding $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ is een (loodrechte) spiegeling in het vlak $V : x_1 + x_2 = 0$.

a. Is S diagonalizeerbaar? Motiveer je antwoord. (3 pt)

b. Bepaal de matrix van S t.o.v. de standaardbasis. (9 pt)

6. Laat V en W eindig-dimensionale vectorruimten zijn met $\dim(V) = \dim(W) = n$ en zij $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ een lineair onafhankelijk stelsel in V. Zij verder $T : V \to W$ een lineaire afbeelding.

   Bewijs dat $\{T(\mathbf{b}_1), \ldots, T(\mathbf{b}_n)\}$ een lineair onafhankelijk stelsel is in W dan en alleen dan als T inverteerbaar is. (7 pt)

TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 1. 18 december 2003.

ANTWOORDEN.

Opgaven 1,2,3 en 4 van het deeltentamen Lineaire Algebra 1b zijn gelijk aan opgaven 3,4,5 en 6 van het tentamen Lineaire Algebra 1. De aangehouden nummering is die van het volledige tentamen.

---

1. Gausz-eliminatie van de uitgebreide matrix $(A|\mathbf{b}_c)$ geeft (bijvoorbeeld)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & | & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & | & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & | & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & | & c-5 \end{pmatrix}. \qquad \text{(5pt)}$$

Er is dus alleen een oplossing voor $c = 0$. (2 pt)

b. Terugsubstitutie geeft als oplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_0$: $\mathbf{x} \in \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. (4 pt)

2. Een vergelijking van V is $-3x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 1$. (4 pt). Nu is

$$d(P, V) = \left| \frac{-3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 8 \cdot 1 - 1}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 8^2}} \right| = \frac{4}{\sqrt{89}}. \qquad \text{(3pt)}$$

3. Het karakteristiek polynoom van A is $-X^2(X + 13)$. De eigenwaarden zijn dus 0 (multipl. 2) en -13. (Ook meteen in te zien door op te merken dat de rang van A 1 is en het spoor -13) (3 pt). Eigenvector bij e.w. -13 A is $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ (2 pt); de eigenruimte bij 0 is het orthogonaal complement van span $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ (3 pt).

b. $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}$ (1 pt) en U is een matrix van eigenvectoren, bijv.
$U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (2 pt).

c. $A^{15} = UD^{15}U^{-1}$ (1 pt), rest van de berekening 4 pt. Het antwoord is $A^{15} = (-13)^{14}A$. Een snellere manier is de volgende: merk op dat A te schrijven is als $A = \mathbf{a}\mathbf{b}^T$. Dan is

$$A^{15} = \mathbf{a}\mathbf{b}^T\mathbf{a}\mathbf{b}^T \ldots \mathbf{a}\mathbf{b}^T = \mathbf{a}(\mathbf{b}^T\mathbf{a})^{14}\mathbf{b}^T$$

en $\mathbf{b}^T\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -13$ dus $A^{15} = (-13)^{14}A$.

4a. Een basis van $W^\perp$ is bijvoorbeeld $\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\1\\1\end{pmatrix}\}$ (2 pt).

b. Gram-Schmidt toepassen (op de bovenstaande basis) geeft

$$\{w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, w_2 = \frac{1}{\sqrt{51}}\begin{pmatrix}5\\-4\\3\\-1\end{pmatrix}\}. \qquad \text{(4pt)}$$

c. $\mathbf{w}^\perp = \dfrac{v\cdot w_1}{w_1\cdot w_1}w_1 + \dfrac{v\cdot w_2}{w_2\cdot w_2}w_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$. Nu $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{w}^\perp = \begin{pmatrix}0\\2\\2\\-2\end{pmatrix}$. (4 pt)

5a. Ja, S heeft een basis van eigenvectoren, nl. V is eigenruimte van S bij e.w. 1, en $V^\perp$ is de eigenruimte bij e.w. -1 (3 pt)

b. Laat S_E^E en S_B^B de matrices van S t.o.v. de standaardbasis, resp. een basis van eigenvectoren zijn, en laat M_B^E en M_E^B de basistransformatiematrices. (In het boek heet M_E^B: $P_{E\leftarrow B}$.) Dan is $S_E^E = M_E^B S_B^B M_B^E$. Nu kies als basis van eigenvectoren bijvoorbeeld
$\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}$ (3 pt). Dan

$$M_E^B = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad S_B^B = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{(3pt)}$$

en M_B^E is de inverse (en dus de getransponeerde) van de (orthogonale) matrix M_E^B. Uiteindelijk vinden we $S_E^E = \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ (3 pt). Een andere (en wsch. snellere) methode is direct de beelden van de standaardbasisvectoren te bepalen.

6. Merk op dat $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ een basis is van V. Stel $\lambda_1 T(\mathbf{b}_1) + \ldots + \lambda_n T(\mathbf{b}_n) = 0$. Dan is $T(\lambda_1\mathbf{b}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{b}_n) = 0$, dus $\lambda_1\mathbf{b}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{b}_n \in$Ker$(T)$. Als T inverteerbaar, dan is Ker$(T) = \{0\}$, dus $\lambda_1\mathbf{b}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{b}_n = 0$ en uit de lineaire onafhankelijkheid van de $\mathbf{b}_i$'s volgt dat alle λ_i nul zijn (4 pt). Als T niet inverteerbaar, dan is er een $\mathbf{a} \in$ Ker(T) met $\mathbf{a} \neq 0$. Daar de $\mathbf{b}_i$'s een basis van V vormen is $\mathbf{a}$ een lineaire combinatie van de $\mathbf{b}_i$'s (met niet alle λ_i nul) (3 pt). (De laatste 3pt punten worden alleen toegekend als is opgemerkt dat $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ een basis van V is.)

TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 1A

23 oktober 2003, 10.00-12.00.

Laat bij elke opgave duidelijk zien hoe je aan het antwoord komt. Het geven van alleen de uitkomst is niet voldoende.

1. Bepaal zowel een parametervoorstelling als een vergelijking van het vlak W in $\mathbf{R}^3$ door de punten $A(1,-1,0)$, $B(2,0,-1)$ en $C(0,1,4)$.

2. In $\mathbf{R}^3$ is gegeven de lijn ℓ met parametervoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   Bereken de afstand van het punt $Q(6,1,1)$ tot ℓ.

3. De matrix A, de vector $\mathbf{x}$ en de vector $\mathbf{b}$ zijn gegeven door

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

a. Los het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ op.

b. Bepaal de rang van A en bepaal een basis van de kolomruimte en de rijruimte van A (leg uit hoe je aan het antwoord komt!).

4. Bereken de inverse van de matrix $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Beschouw voor $a \in \mathbf{R}$ de matrices $C_a = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$.

   Bepaal voor elke a de rang van C_a.

6. $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ is een spiegeling in de lijn $y = -2x$ gevolgd door een projectie op de lijn $y = \frac{1}{2}x$.

   Bepaal de standaardmatrix A van T.

Normering: 1: 10pt, 2: 10pt, 3a: 10pt, 3b: 8pt, 4: 12pt, 5: 16pt, 6: 15pt.

LINEAIRE ALGEBRA 1A, 23 oktober 2003

ANTWOORDEN.

---

1. Een parametervoorstelling is bijvoorbeeld

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Het uitwendig product van de richtingsvectoren geeft een normaalvector. Het uitproduct is $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$, en een vergelijking is (dus) $2x - y + z = 3$.

2. Transleer ℓ en Q over $(0, 1, -3)^T$. De beelden zijn ℓ' =span$\{(1, 2, -1)^T\}$ en $Q'(6, 2, -2)$. Nu is $d(Q, \ell) = d(Q', \ell') = d(Q', Q'')$ met Q'' de loodrechte projectie van Q' op ℓ': Deze is te bepalen d.m.v. $\mathbf{q}'' = \dfrac{\mathbf{q}' \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Nu $d(Q', Q'') = \|\mathbf{q}' - \mathbf{q}''\| = \sqrt{20}$.

3a. Een rijtrapvorm van de uitgebreide matrix $[A|\mathbf{b}]$ is (bijvoorbeeld - de rijtrapvorm is niet uniek) de matrix

$$[A'|\mathbf{b}'] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Oplossen van $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ geeft

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b. Aan de rijtrapvorm van de matrix zien we dat rang(A)=rang(A') $= 3$, een basis van de kolomruimte wordt gevormd door de eerste drie vectoren van A (nl. in de overeenkomstige (de eerste drie) kolommen van A' staat een pivotelement), en een basis van de rijruimte wordt gevormd door de niet-nul-rijen van A', d.w.z. de eerste drie.

4. $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$

5. De matrix C_a is rij-equivalent met $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & -1-a^2 \end{pmatrix}$. Als $a = 1$ wordt de tweede rij nul, en de rang is dan 2. Als $a \neq 1$ kunnen we de tweede rij delen door $a-1$. De matrix is dan rij-equivalent met $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -a-a^2 \end{pmatrix}$. Deze matrix heeft rang 2 als $a + a^2 = 0$, en rang 3 anders. De rang van C_a is dus 2 als $a = 0, 1$ of -1 en 3 anders.

6. De lijnen $y = -2x$ en $y = \frac{1}{2}x$ staan onderling loodrecht. T is dus een projectie op $y = \frac{1}{2}x$, gevolgd door puntspiegeling in de oorsprong (de laatste afbeelding is gelijk aan $-id_{\mathbf{R}^2}$). Als we de formule voor projectie gebruiken vinden we

$$T(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v} \quad \text{met} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dus $T(\mathbf{x}) = -\dfrac{2x+y}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. De standaardmatrix van T is dus $\begin{pmatrix} -4/5 & -2/5 \\ -2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$.

Anders: de (standaard)matrix van spiegeling is $S = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$, de matrix van projectie is $P = \begin{pmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$. De productmatrix PS is de gevraagde matrix.

TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 1

12 augustus 2004, 10.00-13.00.

Studenten die alleen het deeltentamen Lineaire Algebra 1B willen afleggen maken alleen opgaven 3 t/m 6. De duur van het tentamen bedraagt in dit geval 2 uur. Het volledige tentamen Lineaire Algebra 1 bestaat uit opgaven 1 t/m 6.

---

1. Gegeven is het volgende stelsel lineaire vergelijkingen:

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +\,2x_2 & +\,x_3 & & = & 1 \\ 2x_1 & +\,x_2 & & -\,x_4 & = & 3 \\ x_1 & -\,3x_2 & -\,x_3 & -\,x_4 & = & 0 \\ & 3x_2 & +\,4x_3 & +\,2x_4 & = & -5 \end{array}.$$

a. Schrijf het stelsel in de vorm $Ax = b$ met A een matrix en x, b vectoren. (1pt)

b. Los het stelsel op. (8pt)

c. Bepaal een basis van de kolomruimte van A. Motiveer je antwoord. (3pt)

2. Bepaal voor alle $a, b \in \mathbf{R}$ de rang van de matrix

$$M_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & ab \\ a & 1 & a \end{pmatrix}. \quad \text{(8pt)}$$

3. Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Toon aan dat het karakteristieke polynoom van A gelijk is aan $-X^3 + 8X^2 - 19X + 12$. (2 pt)

b. Bereken de eigenwaarden van A. (4 pt)

c. Bepaal een inverteerbare matrix C en een diagonaalmatrix D zodat $A = C^{-1}DC$. (Let op!) (12 pt)

De laatste drie opgaven staan op de ommezijde van het blad.

4. Laat de matrix A gegeven zijn door $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Bepaal een QR-factorisatie van A, m.a.w. bepaal een orthogonale matrix Q en een rechterbovendriehoeksmatrix R zodat $A = QR$. (10 pt)

5. Laat $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ de (loodrechte) spiegeling zijn in het vlak $V : x_1 + x_2 - x_3 = 0$. Bepaal de matrix van S t.o.v. de standaardbasis. (10 pt)

6. Laat $V = \mathcal{M}(2 \times 2, \mathbf{R})$ de vectorruimte van reële 2×2-matrices zijn en laat $A \in V$. Beschouw de afbeelding $T_A : V \to V$ gegeven door $T_A(X) = AX - XA$.

a. Bewijs dat T_A een lineaire afbeelding is. (3 pt)

b. Toon aan dat T_A voor geen enkele $A \in V$ inverteerbaar is. (3 pt)

   Laat nu $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c. Geef de matrix van T_A t.o.v. een zelfgekozen basis in V en bepaal de rang van T_A. (4 pt)

d. Is T_A diagonalizeerbaar? Motiveer je antwoord. (4 pt)

6. Laat $\mathcal{P}_n$ de vectorruimte van reële polynomen van graad hoogstens n. De afbeelding $T : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ is gegeven door $T(p) = 2p + \dfrac{dp}{dx}$.

a. Bewijs dat T een lineaire afbeelding is. (4 pt)

b. Bepaal de matrix van T t.o.v. de basis $\{1, x, \ldots, x^n\}$. (4 pt)

c. Bepaal alle eigenwaarden en eigenvectoren van T. (4 pt)

d. Is T diagonalizeerbaar? Verklaar je antwoord. (3 pt)

TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 1B

17 maart 2004, 14.00-16.00.

---

1. Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Toon aan dat het karakteristieke polynoom van A gelijk is aan $-X^3 + 8X^2 - 19X + 12$. (2 pt)

b. Bereken de eigenwaarden van A. (4 pt)

c. Bepaal een inverteerbare matrix C en een diagonaalmatrix D zodat $A = C^{-1}DC$. (Let op!) (12 pt)

2. Laat de matrix A gegeven zijn door $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Bepaal een QR-factorisatie van A, m.a.w. bepaal een orthogonale matrix Q en een rechterbovendriehoeksmatrix R zodat $A = QR$. (10 pt)

3. Laat $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ de (loodrechte) spiegeling zijn in het vlak $V : x_1 + x_2 - x_3 = 0$. Bepaal de matrix van S t.o.v. de standaardbasis. (10 pt)

4. Laat $\mathcal{P}_n$ de vectorruimte van reële polynomen van graad hoogstens n. De afbeelding $T : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ is gegeven door $T(p) = 2p + \dfrac{dp}{dx}$.

a. Bewijs dat T een lineaire afbeelding is. (4 pt)

b. Bepaal de matrix van T t.o.v. de basis $\{1, x, \ldots, x^n\}$. (4 pt)

c. De eigenvectoren van T noemen we meestal eigenfuncties. Bepaal alle eigenwaarden en eigenfuncties van T. (4 pt)

d. Is T surjectief? Verklaar je antwoord. (3 pt)