Tentamen Lineaire Algebra

Donderdag 21 december 2006, 10:00-13:00

---

a) Het tentamen bestaat uit twee delen. Het eerste deel bestaat uit opgaven 1,2 en 3a),b); het tweede deel uit opgaven 3c),d),e),4,5.

b) Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een (bij voorkeur korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.

c) Met alle onderdelen kunnen maximaal 2 punten verdiend worden, behalve onderdelen 4a) en 5): hiermee kunnen maximaal 4 punten verdiend worden.

---

1. We beschouwen twee rechte lijnen in $\mathbb{R}^3$ met vergelijking in vectorvorm gegeven door

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(deze lijn noemen we L_1) en

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(deze lijn noemen we L_2)

   a) Toon aan dat L_1 en L_2 elkaar loodrecht snijden, en bepaal het snijpunt.

   b) Bereken de afstand van het punt $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ tot de lijn L_2.

   c) Geef de vergelijking van het vlak α (in de vorm $ax + by + cz + d = 0$) dat de rechte lijnen L_1 en L_2 bevat.

   d) Geef de vergelijking van de rechte lijn L_3 (in vectorvorm) die beide lijnen L_1 en L_2 loodrecht snijdt.

   e) Bepaal de vergelijking van een rechte lijn L_4 door de oorsprong die het vlak α snijdt onder een hoek van 45 graden. Is deze rechte lijn L_4 uniek bepaald?

2. Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

en de kolom

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Los het stelsel $Ax = b$ op.

b) Is de matrix A inverteerbaar? Argumenteer.

3. Beschouw de lineaire transformatie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ -x - z \\ -x - y \end{pmatrix}$$

   a) Toon aan dat T een lineaire transformatie is en bepaal de matrix M horend bij T in de standaard orthonormale basis van $\mathbb{R}^3$.

   b) Geef een basis van de kolomruimte en van de nulruimte van T.

   c) Toon aan dat $T \circ T = T$. Volgt hieruit dat T een orthogonale projectie is?

   d) Toon aan dat de matrix M uit onderdeel a) diagonaliseerbaar is.

   e) Bereken $(I + M)^{20}$ met I de eenheidsmatrix.

4. We noemen een $n \times n$ matrix met reële elementen een positieve matrix indien voor alle $x \in \mathbb{R}^n$ het inproduct $< x, Ax >$ positief is, i.e.,

$$< x, Ax >= x^T(Ax) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j A_{ij} \geq 0$$

   a) Toon aan dat iedere matrix A van de vorm $A = B^T B$ symmetrisch en positief is.

   b) Zij A symmetrisch, positief en inverteerbaar. Toon aan dat dan voor alle natuurlijke getallen n de matrices A^n en $(A^{-1})^n$ symmetrisch en positief zijn.

   c) Zij A symmetrisch en positief. Toon aan dat er een symmetrische matrix B bestaat zodanig dat $B^2 = A$. We noemen een dergelijke matrix B een vierkantswortel van A.

   d) Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   Toon aan dat deze matrix positief is en bereken een vierkantswortel (van A).

   e) Geef een voorbeeld van een matrix die niet symmetrisch maar wel positief is.

5. Beschouw de kwadratische kromme K in $\mathbb{R}^2$ met vergelijking

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$$

Breng deze vergelijking in standaard vorm, geef aan welk type kegelsnede door deze vergelijking beschreven wordt, en maak een schets van K.