Hertentamen Lineaire Algebra 1

Donderdag 16 augustus 2007, 10:00-13:00

Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een (bij voorkeur korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.

1. Bekijk de punten $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   a) Geef de vergelijking in vectorvorm voor de lijn L_1 door de punten P_1 en P_2.

   b) Bereken de afstand van het punt $P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ tot de lijn L_1.

   c) Geef de vergelijking (in de vorm $ax + by + cz = d$) van het vlak α dat loodrecht op de lijn L_1 staat en door het punt P_3 gaat.

   d) Bereken de afstand van P_2 tot α.

   e) Geef de vergelijking in vectorvorm van een lijn door de oorsprong die het vlak α snijdt onder een hoek van $45°$.

2. Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 6 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

   en de kolom

$$b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   a) Los het stelsel $Ax = b$ op.

   b) Is de matrix A inverteerbaar? Argumenteer.

   c) Bereken $\det A$ en $\det(A^2)$.

3. Beschouw de lineaire transformatie $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gedefinieerd door

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a^{j+1}x_j \\ \sum_{j=1}^n a^{j+2}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a^{j+n}x_j \end{pmatrix}$$

met $a \in \mathbb{R}$.

a) Bepaal de standaardmatrix M van T.

b) Bepaal de rang (*rank*) van T als functie van de parameter a.

c) Bepaal voor $a \neq 0$ een basis voor de beeldruimte (*range*) en een basis voor de nulruimte (*kernel*) van T.

d) Bepaal voor $a = 1$ de standaardmatrix van $T \circ T$.

4. Laat V en W twee lineaire deelruimten van $\mathbb{R}^n$ zijn. Laat P de matrix van orthogonale projectie op V zijn en Q de matrix van orthogonale projectie op W.

a) Toon aan: als $PQ = QP$, dan is PQ de matrix van orthogonale projectie op $V \cap W$.
(Hint: A is een matrix van orthogonale projectie $\iff A^T = A$ en $A^2 = A$.)

b) Bewijs dat QP de matrix van een orthogonale projectie is of laat met een voorbeeld zien dat dat niet zo hoeft te zijn.

c) Toon aan: als er een orthogonale matrix U bestaat zo dat U^TPU en U^TQU beide diagonaalmatrices zijn, dan $PQ = QP$.

d) Toon aan dat er een orthonormale basis $u_1, \ldots, u_n$ van $\mathbb{R}^n$ bestaat en $1 \leq k \leq m \leq n$ zo dat

$$V \cap W = \operatorname{span}(u_1, \ldots, u_k) \text{ en } W = \operatorname{span}(u_1, \ldots, u_m).$$

e) Toon aan: als $PQ = P$, dan is er een orthogonale matrix U zo dat U^TPU en U^TQU beide diagonaalmatrices zijn. (Hint: gebruik a) en d).)

5. Beschouw de kwadratische kromme K in $\mathbb{R}^2$ met vergelijking

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - \frac{28}{\sqrt{5}}x - \frac{4}{\sqrt{5}}y + 4 = 0.$$

Breng deze vergelijking in standaard vorm, geef aan welk type kegelsnede door deze vergelijking beschreven wordt, en maak een schets van K.

Succes!

Puntenverdeling: de onderdelen van opgave 1 en 4 en 2b) en 3a)b)d) ieder 2 punten, 2a)c) en 3c) ieder 4 punten, en 10 punten voor opgave 5. (Totaal: 50 punten)