TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 1
donderdag 10 augustus 2006, 10.00-13.00

Bij elke vraag dient een berekening of motivering worden opgeschreven.
Het tentamen bestaat uit twee gedeelten: de eerste vier opgaven betreffen de stof van het eerste gedeelte van het college. De laatste vier opgaven gaan over de stof van het tweede gedeelte van het college. Voor beide onderdelen wordt een cijfer gegeven. Het totaalcijfer is gelijk aan het gemiddelde van beide cijfers waarbij geldt dat het cijfer van het eerste gedeelte vervangen wordt door het toetscijfer indien dit laatste hoger uitvalt. Tenslotte worden bij het totaalcijfer de bonuspunten van de quiz opgeteld.

---

1. Beschouw het volgende stelsel lineaire vergelijkingen:

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & -\,x_2 & +\,x_3 & -\,x_4 & = & 5 \\ x_1 & & -2x_3 & +\,x_4 & = & 0 \\ -3x_1 & +\,x_2 & & +\,x_4 & = & -6 \\ & +2x_2 & -\,x_3 & -3x_4 & = & -1 \end{array}.$$

a. Geef een parametervoorstelling van de oplossing van het stelsel. (8 pt)

b. Hoeveel vergelijkingen zijn minimaal nodig om de oplossingsverzameling te beschrijven? Leg je antwoord uit. Geef tevens een minimaal stelsel vergelijkingen dat dezelfde oplossing heeft als het stelsel in (a). (4 pt)

2. ℓ is de lijn in $\mathbf{R}^3$ gegeven door de twee vergelijkingen $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$. Verder is gegeven het punt $B(1, -1, 2)$. V is het vlak dat loodrecht op ℓ staat en door B gaat.

a. Bepaal zowel een parametervoorstelling als een vergelijking van V. (6 pt)

b. Bereken de afstand van B tot de lijn ℓ. (5 pt)

c. Het vlak W gaat door ℓ en staat loodrecht op het vlak $x_3 = 0$. Bepaal een vergelijking van W. (5 pt)

3. De lineaire afbeelding $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ is een (loodrechte) spiegeling in de lijn $\ell \subset \mathbf{R}^2$ met vergelijking $x_2 = 3x_1$.

a. Bepaal de standaardmatrix van T. (8 pt)

4. Gegeven zijn voor $a, b \in \mathbf{R}$ de matrices

$$A_{a,b} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2a & a & 2 \\ b & 0 & b \end{pmatrix}.$$

a. Bepaal voor alle a en b de rang van de matrix $A_{a,b}$. (8 pt)

5. Gegeven is de matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van B. (8 pt)

b. Bereken B^n voor n geheel. (5 pt)

6. Bepaal alle viertallen $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ zodanig dat de matrix $Q = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & a & 2 \\ 2 & 3 & b \\ b & c & d \end{pmatrix}$ een orthogonale matrix is. (8 pt)

7. W is de lineaire deelruimte van $\mathbf{R}^3$ opgespannen door $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. $P : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ is de orthogonale projectie op $W^\perp$.

a. Bepaal een orthonormale basis van $W^\perp$. (5 pt)

b. Bepaal de standaardmatrix van P. (5 pt)

8. Een $n \times n$-matrix A heet antisymmetrisch als $A = -A^T$.

a. Toon aan: als A een antisymmetrische $n \times n$-matrix is, dan is $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 0$ voor elke $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. (5 pt)

b. Bewijs dat een antisymmetrische matrix geen reële eigenwaarden ongelijk aan 0 heeft. (3 pt)