Hertentamen Lineaire Algebra 1

Donderdag 5 april 2007, 14:00-17:00

Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een (bij voorkeur korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.

---

1. Zij α het vlak in $\mathbb{R}^3$ met vergelijking $2x + y + z = 6$.

   a) Bepaal in vectorvorm de vergelijking van de rechte lijn L_1 door de oorsprong loodrecht op het vlak α.

   b) Bepaal de cosinus van de hoek tussen L_1 en de X-as.

   c) Bepaal de coördinaten van het snijpunt van α met L_1.

   d) Stel de vergelijking op (in vectorvorm) van de rechte lijn L_2 die in het vlak α ligt, L_1 snijdt en door het punt $(2, -1, 3)$ gaat.

   e) Bepaal de afstand tussen de oorsprong en de rechte lijn L_2.

2. Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   en de kolom

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   a) Los het stelsel $Ax = b$ op.

   b) Is de matrix A inverteerbaar? Argumenteer.

3. Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 \\ a & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

   met $a \in \mathbb{R}$.

   a) Bepaal de rang van A als functie van de parameter a.

   b) Los $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ op met de regel van Cramer voor die waarden van a waarvoor $\det A \neq 0$.

   c) Bereken de inverse van A voor die waarden van a waarvoor de inverse bestaat.

4. Bekijk de afbeelding

$$\Delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

gedefinieerd via

$$(\Delta(x))_i = \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_n, & i = 1 \\ 2x_i - x_{i+1} - x_{i-1}, & i = 2, \ldots, n-1 \\ 2x_n - x_1 - x_{n-1}, & i = n, \end{cases}$$

voor $i = 1, \ldots, n$.
(De afbeelding $-\Delta$ heet de discrete Laplaciaan op n punten.)

a) Toon aan dat Δ een lineaire afbeelding is.

b) Stel de standaardmatrix op van Δ voor het geval $n = 4$.

c) Toon aan dat voor iedere vector $x \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^{n} (\Delta(x))_i \, x_i = \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i)^2$$

waarbij we de conventie $x_{n+1} = x_1$, $x_0 = x_n$ hanteren.

d) Gebruik onderdeel c) om aan te tonen dat alle eigenwaarden van Δ groter of gelijk aan nul zijn.

e) Laat $l \in \{1, \ldots, n\}$. Bekijk de vector x in $\mathbb{R}^n$ met componenten

$$(x)_i = \cos\left(\frac{2\pi l i}{n}\right), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Toon aan dat x een eigenvector is van Δ en bepaal de bijbehorende eigenwaarde.

f) Toon aan dat de eigenruimte van Δ bij eigenwaarde 0 gelijk is aan

$$E_0 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} : \quad t \in \mathbb{R} \right\}.$$