Hertentamen Lineaire Algebra 1

21 augustus 2008, 10.00-13.00 uur, zaal 312, 412

1. Beschouw in $\mathbb{R}^3$ het vlak V_1 resp. V_2 met vergelijking $x + y + z = 1$ resp. $x - y + z = 3$ en de lijn $L = V_1 \cap V_2$.

(a) Bepaal een parametervoorstelling van L.

(b) Bereken de afstand tussen L en de oorsprong.

2. Beschouw het stelsel

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 0 \\ 2x - z - w &= 0 \\ y + z + w &= 0 \end{aligned}$$

a) Schrijf het stelsel in de vorm $A \cdot X = B$.

b) Wat volgt uit de theorie a priori (d.w.z. zonder enig rekenwerk) betreffende de dimensie van de kern van A?

c) Bereken de oplossingen van het stelsel m.b.v. "vegen", en een basis van de kern van A.

d) Bereken alle oplossingen van het stelsel

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 1 \\ 2x - z - w &= 0 \\ y + z + w &= 1 \end{aligned}$$

3. Beschouw voor $a \in \mathbb{R}$ de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

a) Bereken de determinant van $A(a)$.

b) Bepaal alle $a \in \mathbb{R}$ waarvoor $A(a)$ niet inverteerbaar is.

c) Bereken de inverse van de matrix $A(0)$.

Opgave 4. t/m 6. z.o.z.

4. Bepaal een orthonormale basis van het hypervlak H in $\mathbb{R}^4$ gegeven door de vergelijking $x - y + z - w = 0$.

5. Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bereken de eigenwaarden en eigenruimten van A. Bestaat er een basis van de $\mathbb{R}^3$ bestaande uit eigenvectoren van A?

6. Laat A een $(n \times n)$-matrix zijn.

a) Bewijs dat

$$2 \cdot \mathrm{rang}(A) - n \leq \mathrm{rang}(A^2) \leq \mathrm{rang}(A) \ .$$

b) Stel dat $\mathrm{rang}(A) = n - 1$; dan volgt uit a) dat

$$n - 2 \leq \mathrm{rang}(A^2) \leq n - 1 \ .$$

Geef (tenminste voor $n = 2$) voorbeelden van $(n \times n)$-matrices A, B met

$$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B) = n - 1 \ , \ \mathrm{rang}(A^2) = n - 2 \ , \ \mathrm{rang}(B^2) = n - 1 \ .$$