Toets Lineaire algebra 1, 25-10-2007, 10.00-11.45

1. a) Bereken de vergelijking van het vlak V in $\mathbb{R}^3$ door de punten $(1,2,2)$, $(2,1,2)$ en $(2,2,1)$.
b) Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijn door het punt $(2,2,2)$ in de richting $(1,0,0)$ met het vlak V uit a).
Indien je deel a) niet hebt opgelost, geef dan aan hoe je het snijpunt zou willen berekenen als de vergelijking van V zou zijn $ax + by + cz = d$.

2. a) Los het volgende stelsel lineaire vergelijkingen op.

$$\begin{aligned} x - 2w &= -1 \\ y &= 4 \\ y + z &= 5 \\ 2x - z - 3w &= -1 \end{aligned}$$

b) Laat zien dat het stelsel

$$\begin{aligned} x - 2w &= 0 \\ y &= 0 \\ y + z &= 0 \\ 2x - z - 3w &= 0 \end{aligned}$$

alleen de triviale oplossing $(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0)$ heeft.

3. Laat $M(m \times n)$ de vektorruimte zijn van $(m \times n)$-matrices, en K een vaste kolomvektor in $\mathbb{R}^n$. Laat zien dat de deelverzameling U van alle A in $M(m \times n)$ met $A \cdot K = \underline{0}$ een lineaire deelruimte van $M(m \times n)$ is.

4. a) Laat A een $(n \times n)$-matrix zijn met de eigenschap $A^2 = A \cdot A = A$, en stel dat $X \neq \underline{0}$ een kolomvektor in $\mathbb{R}^n$ is en a een getal zodat $A \cdot X = aX$. Laat zien dat $a = 0$ of $a = 1$.

b) Laat A een $(n \times n)$-matrix zijn met de eigenschap $A^2 = A \cdot A = I_n$, waarbij I_n de $(n \times n)$-eenheidsmatrix is. Stel verder dat $X \neq \underline{0}$ een kolomvektor in $\mathbb{R}^n$ is en a een getal zodat $A \cdot X = aX$. Laat zien dat $a = 1$ of $a = -1$.