Tentamen Lineaire Algebra 1, 20 december 2007

1. a) Geef een parametervoorstelling van de lijn L in $\mathbb{R}^3$ door de punten $(1,2,3)$ en $(3,1,2)$.

b) Bereken de vergelijking van het vlak V in $\mathbb{R}$ dat loodrecht staat op L en door het punt $(2,1,1)$ gaat.

2. Beschouw het stelsel

$$\begin{aligned} x+2y+z &= 0 \\ 2x+5y+z &= 0 \\ x+y+2z &= 0 \end{aligned}$$

a) Schrijf het stelsel in de vorm $A \cdot X = B$.

b) Bereken alle oplossingen van het stelsel, en geef een basis van de kern van A.

c) Bepaal de determinant van A.

d) Bereken alle oplossingen van het stelsel

$$\begin{aligned} x+2y+z &= 2 \\ 2x+5y+z &= 1 \\ x+y+2z &= 5 \end{aligned}$$

3. Beschouw de matrix

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & a \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

met $a \in \mathbb{R}$.

a) Bereken de determinant van $A(a)$.

b) Bepaal alle $a \in \mathbb{R}$ waarvoor $A(a)$ inverteerbaar is, en bereken voor deze a de inverse van $A(a)$.

Opgave 4. t/m 6. z.o.z.

4. Beschouw in $\mathbb{R}^4$ de vektoren

$$v_1 = (1,0,0,1) \ , \ v_2 = (1,0,1,0) \ , \ v_3 = (0,1,0,1) \ .$$

a) Laat zien dat v_1, v_2 en v_3 lineair onafhankelijk zijn.

b) Bereken m.b.v. de methode van Gram-Schmidt een orthonormale basis van de deelruimte opgespannen door v_1, v_2 en v_3.

5. Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Bereken de eigenwaarden en eigenruimten van A, en geef een basis van de $\mathbb{R}^3$ bestaande uit eigenvektoren van A.

6. Laat V de vektorruimte zijn van alle oneindig vaak differentieerbare funkties op $[0,\pi]$, en U de lineaire deelruimte van V opgespannen door de funkties $\sin(x),\ \cos(x)$.

a) Laat zien dat $\sin(x)$ en $\cos(x)$ lineair onafhankelijk en dus een basis van U zijn.

b) Laat zien dat de afbeelding

$$L : V \longrightarrow V \quad , \quad L(f) = \frac{df}{dx} + f \quad \text{voor alle } f \in V \ ,$$

lineair is.

c) Laat zien dat $L(U) \subset U$, zodat L een lineaire afbeelding

$$L|_U : U \longrightarrow U \quad , \quad L|_U(f) = \frac{df}{dx} + f \quad \text{voor alle } f \in U \ ,$$

oplevert.

d) Bepaal de matrix A van $L|_U$ t.o.v. de basis $\sin(x),\ \cos(x)$.

e) Laat zien dat A inverteerbaar is en bepaal de inverse matrix A^{-1}.

f) Laat zien dat $L|_U$ inverteerbaar is met inverse

$$(L|_U)^{-1}(f) = \frac{1}{2}\left(f - \frac{df}{dx}\right) \quad \text{voor alle } f \in U \ .$$