Naam:

Wiskundigen

Toets Lineaire Algebra 1

donderdag 23 oktober 2008, 10.00-12.00

(1) Gegeven zijn de vector

$$b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

en de matrix

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ c & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

voor elke $c \in \mathbb{R}$.

(a) Bepaal alle $c \in \mathbb{R}$ waarvoor A_c inverteerbaar is.
(b) Is de matrix A_0 inverteerbaar? Zo ja, bepaal de inverse van A_0.
(c) Bepaal alle $x \in \mathbb{R}^3$ waarvoor geldt $A_0 x = b$.

(2) **Waar of niet waar**? Geef een **korte** uitleg als de uitspraak waar is en een tegenvoorbeeld als ze niet waar is.

(a) Als A en B twee $n \times n$-matrices zijn en AB is inverteerbaar, dan zijn A en B beide ook inverteerbaar.
(b) Als U en V deelruimtes zijn van een vectorruimte W, dan is de vereniging $U \cup V$ ook een deelruimte.
(c) Zij V een vectorruimte. Als $v_1, \ldots, v_n \in V$ lineair onafhankelijk zijn, dan vormen $v_1, \ldots, v_n$ een basis voor $\mathrm{Sp}(\{v_1, \ldots, v_n\})$.
(d) Zij V een vectorruimte over $\mathbb{R}$. Als $v_1, v_2, v_3 \in V$ een basis vormen voor V, dan vormen $v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3$ ook een basis voor V.
(e) Als A en B twee $n \times n$-matrices zijn en AB is de nulmatrix, dan is BA ook de nulmatrix.

(3) (**meerkeuze**, geef **korte** uitleg) Zij V een vectorruimte van dimensie n en k, m positieve gehele getallen. Als $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ lineair onafhankelijk zijn en $w_1, w_2, \ldots, w_m \in V$ brengen V voort (m.a.w. ze spannen V op), dan geldt

(a) $k \leq m \leq n$,
(b) $k \leq n \leq m$,
(c) $m \leq k \leq n$,
(d) $m \leq n \leq k$,
(e) $n \leq k \leq m$,
(f) $n \leq m \leq k$.

Draai het blad om voor de rest van de toets

(4) Zij m een positief geheel getal. Bepaal de afstand van het punt

$$P = (1, 2, 1, 2, \ldots, 1, 2) \in \mathbb{R}^{2m}$$

tot de lijn

$$L = \{(r, r, \ldots, r) \mid r \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{2m}.$$

(5) Zij n een positief geheel getal. Gegeven een verzameling $S \subset \mathbb{R}^n$ definiëren we

$$S^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \forall s \in S : s \perp v\}.$$

(a) Bewijs dat voor elke verzameling $S \subset \mathbb{R}^n$ de verzameling $S^{\perp}$ een deelruimte is.

(b) Gegeven is de verzameling

$$S_1 = \{(0, 2, 1, 1), (1, 2, 2, 1), (1, 0, 1, 0)\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Bepaal een basis voor $S_1^{\perp}$.