

Naam:

Wiskundigen

Tentamen Lineaire Algebra 1

Donderdag 18 december 2008, 10.00-13.00

- (1) Bepaal voor alle reële waarden van a de rang van de matrix

$$C_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -4a \end{pmatrix}.$$

- (2) Zij $n \geq 2$ een geheel getal en laat P_n de vectorruimte van alle polynomen met coëfficiënten in \mathbb{R} zijn van graad ten hoogste n . Zij $T: P_n \rightarrow \mathbb{R}^3$ de lineaire afbeelding gegeven door

$$T(f) = (f(-1), f(0), f(1)).$$

Je hoeft niet te bewijzen dat T lineair is. Laat E de standaardbasis van \mathbb{R}^3 zijn en B de basis $(1, x, \dots, x^n)$ van P_n .

- (a) Bepaal $[T]_E^B$ in het geval dat $n = 3$.
(b) Zij $v_1 = (4, 1, 1)$, $v_2 = (0, 2, -1)$ en $v_3 = (1, -1, 1)$. Laat zien dat $C = (v_1, v_2, v_3)$ een basis is voor \mathbb{R}^3 en bepaal $[T]_C^B$ in het geval dat $n = 3$.
(c) Wat is de dimensie van de kern van T voor algemene $n \geq 2$?
- (3) Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.
- (a) Geef een inverteerbare matrix C en een diagonaalmatrix D zodanig dat $D = C^{-1}AC$.
(b) Bereken A^n voor elk positief geheel getal n .

- (4) Het vlak $W \subset \mathbb{R}^3$ is gegeven door $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ en b is de vector $(-3, -1, 1)$.
- (a) Bepaal een orthonormale basis voor W (met betrekking tot het standaard inproduct).
(b) Bepaal $b_1 \in W$ en $b_2 \in W^\perp$ zodanig dat $b = b_1 + b_2$.
(c) Bewijs dat voor alle $x \in W$ geldt $\|b - x\| \geq \|b_2\|$.
(d) Bereken de afstand van het punt $(-3, -1, 1)$ tot W .

- (5) Zij n een positief geheel getal en $a, b \in \mathbb{R}^n$ vectoren zodanig dat $\langle a, a \rangle = \langle b, b \rangle = 1$ en $\langle a, b \rangle = 0$ ($\langle x, y \rangle$ staat voor het standaard inproduct op \mathbb{R}^n). De afbeelding $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ wordt gegeven door

$$L(x) = \langle a, x \rangle \cdot b.$$

- (a) Toon aan dat L een lineaire afbeelding is.
(b) Laat zien dat L^2 de nulafbeelding is.
(c) Toon aan dat 0 de enige eigenwaarde van L is.
(d) Leg uit of L diagonaliseerbaar is.

- (6) WAAR of NIET WAAR? (geen uitleg nodig)
- (a) Als A een $m \times n$ matrix is van rang m , dan is de lineaire afbeelding $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax$ injectief.
 - (b) Als A een $m \times n$ matrix is van rang n , dan is de lineaire afbeelding $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax$ injectief.
 - (c) Als A een $m \times n$ matrix is van rang m , dan is de lineaire afbeelding $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax$ surjectief.
 - (d) Als A een $m \times n$ matrix is van rang n , dan is de lineaire afbeelding $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax$ surjectief.
 - (e) Als V een eindig voortgebrachte vectorruimte is met basis B en $f: V \rightarrow V$ en $g: V \rightarrow V$ zijn lineaire afbeeldingen, dan geldt

$$[f]_B^B \cdot [g]_B^B = [f \circ g]_B^B.$$

- (f) Als V een vectorruimte is en $v_1, v_2, v_3 \in V$ zijn eigenvectoren van een lineaire afbeelding $T: V \rightarrow V$, bijbehorende bij drie verschillende eigenwaarden, dan zijn v_1, v_2, v_3 lineair onafhankelijk.
- (g) Als $T: V \rightarrow V$ een lineaire afbeelding is van een vectorruimte V naar zichzelf, dan is $T^{-1}(b)$ een lineaire deelruimte voor alle $b \in V$.
- (h) Als een vierkante matrix A diagonaliseerbaar is, dan is A inverteerbaar.
- (i) Als een vierkante matrix A inverteerbaar is, dan is A diagonaliseerbaar.