

Tentamen Lineaire Algebra 1 (Wiskundigen)

Maandag, 4 januari 2010, 14.00-17.00

Geen rekenmachines. Motiveer elk antwoord.

- (1) (a) Bepaal voor alle reële waarden van a de rang van de matrix

$$C_a = \begin{pmatrix} a & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}.$$

- (b) Is C_a inverteerbaar voor $a = -2$? Zo nee, geef aan waarom niet; zo ja, geef de inverse.

- (2) Zij $V \subset \mathbb{R}^3$ het vlak dat het punt $(0, -1, 0)$ bevat en dat loodrecht staat op de vector $n = (1, 2, -2)$. Bereken de afstand van het punt $P = (3, 2, 1)$ tot V .

- (3) Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

- (a) Geef een inverteerbare matrix P en een diagonaalmatrix D zodanig dat $A = PDP^{-1}$.
(b) Bereken A^n voor elk positief geheel getal n .

- (4) De lineaire deelruimte $V \subset \mathbb{R}^4$ is gegeven door

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 &= 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 7x_3 + 3x_4 &= 0. \end{aligned}$$

- (a) Geef een basis voor V en een basis voor het orthogonale complement V^\perp van V .
(b) Zij $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ de (orthogonale) projectie op V en zij E de standaardbasis voor \mathbb{R}^4 . Bepaal de matrix $[T]_E^E$ die T beschrijft ten opzichte van basis E .

Je mag het antwoord, als je dat wilt, geven als product van matrices en inverses van matrices zonder dat product verder uit te werken, dus bijvoorbeeld als “ $AB^{-1}C$ ” voor specifieke matrices A , B en C die je natuurlijk wel expliciet moet geven. (Hint: bepaal eerst een matrix die T beschrijft ten opzichte van een basis voor \mathbb{R}^4 bestaande uit een basis voor V en een basis voor V^\perp .)

Op de volgende pagina staan meer opgaven.

- (5) Gegeven zijn een lichaam F en twee lineaire afbeeldingen

$$f, g: F^9 \rightarrow F^4.$$

Laat zien dat er een vector $v \in F^9$ is met $v \neq 0$ en

$$f(v) = g(v) = 0.$$

(Hint: wat zijn de dimensies van $\ker f$ en $\ker g$ minstens?)

- (6) Zij $n \geq 1$ een geheel getal en laat P_n de vectorruimte zijn van alle polynomen met coëfficiënten in \mathbb{R} van graad ten hoogste n . Zij

$$D: P_n \rightarrow P_n$$

de lineaire afbeelding gedefinieerd door $D(f) = f'$, waarbij f' staat voor de afgeleide van f .

- Geef voortbrengers voor de kern van D .
 - Wat is de rang van D ?
 - Laat zien dat $D^{n+1} = D \circ D \circ \dots \circ D$ (de samenstelling van $n + 1$ keer de afbeelding D) gelijk is aan de nulafbeelding (de afbeelding die alles naar 0 stuurt).
 - Bewijs dat D precies één eigenwaarde λ heeft, namelijk $\lambda = 0$.
 - Is D diagonaliseerbaar?
- (7) WAAR of NIET WAAR? Geef korte uitleg als het WAAR is en een tegenvoorbeeld als het NIET WAAR is.
- Elke lineaire afbeelding $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ heeft ten minste één eigenwaarde.
 - Als $T: V \rightarrow V$ een injectieve lineaire afbeelding is en $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ zijn lineair onafhankelijk, dan zijn ook $T(v_1), T(v_2), T(v_3)$ en $T(v_4)$ lineair onafhankelijk.
 - Als $T: V \rightarrow V$ een lineaire afbeelding is van een vectorruimte V naar zichzelf, dan is $T^{-1}(b)$ een lineaire deelruimte voor alle $b \in V$.
 - Als een vierkante matrix A inverteerbaar is, dan is A diagonaliseerbaar.
 - Als een vierkante matrix A diagonaliseerbaar is, dan is A inverteerbaar.