Lineaire algebra I (wiskundigen)

Toets, donderdag 27 oktober, 2011

(1) Zij $V \subset \mathbb{R}^3$ het vlak

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 3x - y + 2z = 7 \}.$$

Bepaal de afstand van het punt $Q = (-5, 4, -1) \in \mathbb{R}^3$ tot het vlak V.

(2) Bepaal voortbrengers voor de kern van de volgende matrices en bepaal ook de inverse, als die bestaat.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(3) Zij $r_\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de rotatie van $\mathbb{R}^2$ om de oorsprong $(0, 0)$ over een hoek α.

(a) Bepaal de matrix A zodanig dat voor alle $v \in \mathbb{R}^2$ geldt $r_\alpha(v) = Av$.

(b) Bewijs dat voor alle hoeken α en β geldt

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta,$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta.$$

(4) Zij V een vectorruimte over $\mathbb{R}$ en $s \colon V \to V$ een lineaire afbeelding. Neem aan dat voor alle $v \in V$ geldt $s(s(v)) = v$. Definieer

$$V_+ = \{v \in V \ : \ s(v) = v\},$$
$$V_- = \{v \in V \ : \ s(v) = -v\}.$$

(a) Laat zien dat s een isomorfisme is.

(b) Laat zien dat voor elke $v \in V$ geldt

$$\tfrac{1}{2}(v + s(v)) \in V_+ \qquad \text{en} \qquad \tfrac{1}{2}(v - s(v)) \in V_-.$$

(c) Bewijs dat V_+ en V_- complementaire deelruimtes van V zijn, dus dat er geldt

$$V_+ \cap V_- = \{0\} \qquad \text{en} \qquad V_+ + V_- = V.$$