Mathematisch Instituut – Universiteit Leiden

Tentamen Lineaire Algebra 1, 24 januari 2012, 10:00 – 13:00

Motiveer steeds je antwoord. Rekenmachine en dictaat zijn niet toegestaan. Er zijn in totaal 50 punten te halen.

Opgave 1 (8pt)**.**

(a) Geef een vergelijking voor het vlak $V \subset \mathbf{R}^3$ dat de punten $(2, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ en $(-1, 1, 1)$ bevat.

(b) Bereken de afstand van het punt $(3, 3, 3) \in \mathbf{R}^3$ tot het vlak $W \subset \mathbf{R}^3$ gegeven door $2x + y + z = 0$.

Oplossing:

(a) $x + 2y + 3z = 4$;

(b) $2\sqrt{6}$.

Opgave 2 (10pt)**.** Voor alle reële getallen a wordt de afbeelding $C_a : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ gegeven door de matrix

$$\begin{pmatrix} a+2 & -4 & 4 \\ 4 & a-6 & 4 \\ 2 & -2 & a \end{pmatrix}.$$

(a) Voor welke waardes van a is C_a inverteerbaar?

(b) Reken de inverse van C_1 uit.

(c) Geef een basis voor de kern en het beeld van C_2.

Oplossing:

(a) $\det(C_a) = a(a-2)^2$, dus inverteerbaar voor $a \neq 0, 2$;

(b) $C_1^{-1} = C_1$;

(c) Basis kern: $\{(1, 0, -1), (1, 1, 0)\}$, basis beeld: $\{(2, 2, 1)\}$.

Opgave 3 (10pt)**.** Zij A de matrix

$$A = \begin{pmatrix} -17 & 9 \\ -30 & 16 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal alle eigenwaarden van A en bepaal voor elke eigenwaarde een basis voor de bijbehorende eigenruimte.

(b) Bepaal een diagonaalmatrix D en een inverteerbare matrix P zodanig dat geldt $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

(c) Bereken A^{2013}. In je antwoord mag je uitdrukkingen zoals 3^{2013} laten staan.

Oplossing:

(a) Eigenwaardes zijn 1 en -2. Basis voor eigenruimte 1: is $\{(1, 2)\}$; en voor -2: $\{(3, 5)\}$;

(b) $D = \mathrm{diag}(1, -2)$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$;

(c) Laat $c = (-2)^{2013}$, dan $A^{2013} = \begin{pmatrix} -5+6c & 3-3c \\ -10+10c & 6-5c \end{pmatrix}$.

Opgave 4 (8pt)**.** Zij $U_1 \subset \mathbf{R}^3$ het vlak opgespannen door de vectoren $(1, 3, 0)$ en $(2, 2, 2)$. Zij $U_2 \subset \mathbf{R}^3$ het vlak gegeven door $x + y + z = 0$. Bepaal een basis voor de doorsnede $U_1 \cap U_2$.

Oplossing: Basis is $\{(1, -5, 4)\}$.

Opgave 5 (4pt)**.** Gegeven zijn twee surjectieve lineaire afbeeldingen $f, g : \mathbf{R}^{11} \to \mathbf{R}^4$. Bewijs: $\ker f \cap \ker g \neq 0$.

Oplossing: Standaard met dimensieformules.

Opgave 6 (5pt)**.** Geef een voorbeeld van een reële vectorruimte V en een lineaire afbeelding $L : V \to V$ zodanig dat elke $\lambda \in \mathbf{R}$ een eigenwaarde van L is.

Oplossing: Neem $V = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ en de afbeelding $L : V \to V$ door $f \mapsto xf$.

Opgave 7 (5pt)**.** Zij $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ een lineaire afbeelding met n verschillende reële eigenwaarden, en $B : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ een lineaire afbeelding die met A commuteert, dat wil zeggen, $AB = BA$. Bewijs dat B diagonaliseerbaar is.

Oplossing: Laat $\{v_1, \ldots, v_n\}$ een basis van $\mathbf{R}^n$ zijn die een basis is van eigenvectoren van A zodanig dat $Av_i = \lambda_i v_i$. Merk op $A(Bv_i) = BAv_i = B\lambda_i v_i = \lambda_i(Bv_i)$. Dus Bv_i zit in de eigenruimte bij eigenwaarde v_i. Dus $Bv_i = c_i v_i$ voor zekere $c_i \in \mathbf{R}$ (hier gebruik je dat de eigenruimte dimensie 1 hebben). Dus v_i is ook een eigenvector van B en dus is B diagonaal in de basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$.