

Tentamen Lineaire Algebra 1 (Wiskundigen)
Donderdag, 26 januari 2012, 10.00-13.00
Geen rekenmachines. Motiveer elk antwoord.

1. (12pt) Voor alle reële getallen a definiëren we de matrix C_a als

$$C_a = \begin{pmatrix} 2 & a & -1 \\ 1 & a & 0 \\ -2 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Verder definiëren we

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bepaal voor alle reële waarden van a de rang van de matrix C_a .
 - (b) Is C_a inverteerbaar voor $a = 1$? Zo nee, geef aan waarom niet; zo ja, geef de inverse.
 - (c) Voor welke $a \in \mathbb{R}$ heeft de vergelijking $C_a \cdot x = v$ precies één oplossing x in \mathbb{R}^3 ?
 - (d) Beschrijf de volledige oplossingsverzameling van de vergelijking $C_a \cdot x = v$ voor $a = 2$.
2. (9pt) (a) Geef een vergelijking voor het vlak $V \subset \mathbb{R}^3$ dat de punten $(1, 0, 2)$, $(-1, -1, 2)$ en $(1, 1, 0)$ bevat.
- (b) Zij $W \subset \mathbb{R}^3$ het vlak waarvoor de vector $a = (2, 1, -2)$ een normaal is en dat het punt $p = (1, 0, 0)$ bevat. Bepaal de afstand van het punt $q = (1, 2, 3)$ tot W .
3. (6pt) Gegeven zijn twee injectieve lineaire afbeeldingen f en g van \mathbb{R}^{11} naar \mathbb{R}^{16} . Bewijs dat er een niet-nul vector $v \in \mathbb{R}^{16}$ bestaat die bevat is in zowel het beeld van f als het beeld van g .

Op de volgende pagina staan meer opgaven.

4. (11pt) Zij A de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bepaal alle eigenwaarden van A en bepaal voor elke eigenwaarde een basis voor de bijbehorende eigenruimte.
- (b) Bepaal een diagonaalmatrix D en een inverteerbare matrix P zodanig dat geldt $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.
- (c) Bereken A^{2012} . In je antwoord mag je uitdrukkingen zoals 7^{2012} laten staan.

5. (7pt) Zij $U_1 \subset \mathbb{R}^3$ het vlak opgespannen door $(1, 2, 0)$ en $(2, 2, 1)$. Zij $U_2 \subset \mathbb{R}^3$ het vlak opgespannen door $(1, 2, 2)$ en $(-1, 2, 0)$. Bepaal een basis voor de doorsnede $U_1 \cap U_2$.

6. (5pt) Zij n een oneven positief geheel getal en $A = (a_{ij})$ een reële antisymmetrische $n \times n$ matrix. Dit betekent dat voor alle $1 \leq i, j \leq n$ geldt $a_{ij} = -a_{ji}$. Met andere woorden, voor de getransponeerde A^\top van A geldt $A^\top = -A$. Bewijs dat A niet inverteerbaar is.